This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

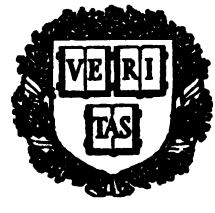
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Phil
333
3

Phil 333.3

HARVARD COLLEGE
LIBRARY



FROM THE BEQUEST OF
JAMES WALKER
(Class of 1814)
President of Harvard College

"Preference being given to works in the Intellectual and Moral Sciences"

6798.

Das Princip

der

Infinitesimal-Methode

und seine Geschichte.

Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik.

Von

Dr Hermann Cohen
ordentlichem Professor der Philosophie
an der Universität Marburg.

Berlin
Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung
Harrwitz und Gossmann
1883.

~~H 5194~~
Phil 333.3

HARVARD COLLEGE
APR 18 1888
LIBRARY.

Walker Fund.

Vorwort.

Was ich systematisch in dieser Abhandlung anstrebe, ist in den Titel aufgenommen worden. So sehr halte ich den systematischen Gedanken für den Zweck der Schrift. Den Grund dieses Anspruchs kann allein die Ausführung rechtfertigen. Es ist unnöthig, darüber Bemerkungen vorauszuschicken.

Nur über die Verbindung dieser Bestrebung mit dem historischen Interesse möchte es nicht unangemessen sein, ein kurzes Wort auch hier zu äussern, zumal wegen dieser Verbindung in der Eintheilung und Darstellung Schwierigkeiten sich nicht vermeiden liessen.

Nirgend ist es mir so sehr Bedürfniss gewesen, und nirgend auch so unmittelbar nützlich erschienen, zugleich mit der Durchführung eines systematisch entscheidenden Gedankens seine geschichtliche Entwickelung zu verfolgen.

Ich beabsichtige hier, den Begriff der Realität in seinem Werthe für die Begründung der Erkenntniss auszuzeichnen, und bin seiner systematischen Charakteristik in der Einleitung wie in den Ausführungen nachgegangen. Aber bei dem Reize, den das Spinnen der Gedanken hat, ist mir die unbefangenere Ueberzeugung von der Wahrheit der Sache vorzugsweise aus dem Einvernehmen mit dem geschichtlichen Gange des Problems gewachsen. Denn die Befürchtung lag allzunahe, dass durch das Geltendmachen des Infinitesimalbegriffs als eines Grundbegriffs des wissenschaftlichen Bewusstseins ein Eingriff in das Detail der mathematischen Forschung, das ich nach dem Umfang meiner Studien nicht überschauen kann, verübt sein könnte. Hat doch Hegel gerade an der Kritik dieses Begriffs seinen Schiffbruch blosgestellt.

Dahingegen bin ich durch den geschichtlichen Zusammenhang, in welchem der Ursprung des Gedankens zu betrachten war, der

Gefahr des dilettantischen Redens in mathematischen Fragen, die einer andern Verbindung der Probleme angehören, enthoben worden, weil ich für meinen Zweck hauptsächlich an die Quellen gewiesen war. Was als eine Grundlage, als eine, wie man sagt, logische Voraussetzung der Wissenschaft in Anspruch zu nehmen sei, das kann zunächst allein die geschichtliche Einsicht eröffnen. Von dieser Annahme bin ich auch in der Ueberzeugung befestigt worden, dass Kants Genius nicht von den sensualistischen Aufklärern, sondern aus dem Studium der Begründer der mathematischen Naturwissenschaft die Anleitung zur transscendentalen Methode empfangen hat.

Was sonach die Kategorie der Realität für die Begriffe der Materie und Natur wie für das Problem des Bewusstseins zu bedeuten und zu leisten habe, sollen wir bei denen erfragen, deren in einander greifende Arbeit die neue Wissenschaft entdeckt hat. Galilei, Kepler und Newton, Descartes und Leibniz mit ihren Genossen und Vermittlern können uns Kant begreifen lehren, und in seinem Geiste das Werk der Philosophie fortzuführen helfen.

Marburg, im August 1883.

Hermann Cohen.

Inhaltsverzeichniss.

I. Einleitung.

		Seite
1.	Die Begründung des Infinitesimalbegriffs ein Problem der Philosophie	1
2.	Die in der Grenz-Methode enthaltenen Voraussetzungen	1
3.	Der Grenzstreit von Anschauung und Denken liegt jenseit der Logik	2
4.	Unterschied von Logik und Erkenntnisstheorie	3
5.	Zusammenhang von Wissenschaft und Erkenntnisstheorie	4
6.	Unterschied von Erkenntnisstheorie und Psychologie	4
7.	Bedenken gegen den Titel Erkenntnisstheorie	5
8.	Erkenntnisskritik	6
9.	Erkenntnisskritik der wissenschaftliche Idealismus	6
10.	Die historische Vorbedingung der Erkenntnisskritik	7
11.	Die Begründung des Infinitesimalbegriffs Problem der Erkenntnisskritik	8
12.	Verhältniss der erkenntnisskritischen Discussion eines einzelnen Begriffs zu dem erkenntnisskritischen System	9
13.	Methodische Gleichwerthigkeit der erkenntnisskritischen Grundsätze	9
14.	Unterscheidung und Charakteristik der einzelnen Grundsätze	10
15.	Systematische und historische Ableitung des Infinitesimalbegriffs	11
16.	Leibniz' Antheil an der Begründung des Infinitesimalbegriffs	12
17.	Newtons Verhältniss zur Philosophie	13
18.	Differential und Realität	13
19.	Differential und intensive Grösse	15
20.	Intensiv und Inextensiv	15
21.	Anschauung und Denken sind erkenntnisskritische Abstractionen	15
22.	Leistung des Denkens in dem Infinitesimalbegriff	16
23.	Anschauung ein Kantischer Terminus	17
24.	Anschauung als Anschauen	18
25.	Anschauung Bezogenheit des Bewusstseins als auf ein Gegebenes	18
26.	Das Infinitesimale im Verhältniss zur Zeit-Anschauung und zur Zahl	20
27.	Das mechanische Motiv des Differentialbegriffs	21
28.	Uebergang zur selbständigen Bedeutung der Realität	23
29.	Descartes' Substanz der Ausdehnung	23
30.	Die Abstraction der Kategorie und der Grundsatz	24
31.	Verhältniss von Substanz und Causalität zur Realität	25

Seite

32. Realität und Dasein 27
33. Intensive Realität 28
34. Dreifache Vermittelung des Infinitesimalbegriffs 29
35. Anfänge des Unendlichkleinen 29
36. Grenze und Untheilbares 30
37. Grenze und Ursprung 31
38. Das Motiv der Bewegung 32
39. Das Tangenten-Problem 33
40. Das Princip der Continuität eine Grundgestalt der Einheit des Bewusstseins 34
41. Die Continuität und das limitirende Urtheil 35
42. Die Continuität und das Infinitesimale 37
43. Die Continuität und die Zahl 38
44. Die qualitative Einheit der limitativen Realität 39
45. Continuität und Veränderung 41
46. Continuität und Zeit. Barrow 42
47. Galileis partes non quantae 44
48. Der infinitesimale Begriff der Beschleunigung 47
49. Uebergang zu Leibniz 50

II. Geschichte.

50. Das Differential als Entdeckung des philosophischen Systematikers 52
51. Die Monade, die Realität und das Einfache 52
52. Naturgesetze und veritates aeternae 55
53. Das Gesetz der Continuität 56
54. Continuität und Möglichkeit 58
55. Das Unendliche und das Endliche 60
56. Die reine Form der Bewegung 63
57. Die Ordnungen des Unendlichkleinen 65
57a. Die mechanische Bedeutung der Differentialien 67
58. Das Intensive und das Inextensive 69
59. Die Rechnung mit den Differentialien 73
60. Das Unendlichkleine und das Ich 75
61. Uebergang zu Newton 78
62. Die Fluxion 79
63. Das Moment 80
64. Fluxion und Fluente 81
65. Methode der ersten und letzten Verhältnisse 83
66. Die Erzeugung der Grössen und die Natur 86
67. Entdeckung und Begründung 87
68. Die Voraussetzungen und Mängel der Grenz-Methode 88
69. Das Unendlichkleine als Null. Euler 91
70. Die Arten der Gleichheit 94
71. Das Positive in der limitativen Null 95
72. La Grange's Metaphysik 96
73. Carnots Hilfsgrössen 97

Seite

74. Wolfs Intensio als Qualität 100
75. Baumgartens Mathesis Intensorum 102
76. Lamberts Intensives und die Empfindung 102
77. Kants Beziehung des Intensiven auf Bewusstsein 105
78. Kants Unterscheidung von Empfindung und Anschauung . . . 106
79. Die intensive Grösse und das Infinitesimale bei Kant 110
80. Bendavids Intension und Qualität 112
81. E. G. Fischers Zurückführung auf das Vorstellungsvermögen . . 113
82. Das Unendlichkleine als Bestandtheil der Stetigkeit 115
83. Fries, Apelt, Herbart 117
84. Die metaphysische und die psychologische Kritik des Infinitesimalen 118
85. Die mathematische Begründung. Cournot 121

III. Ausführungen.

86. Verhältniss der Elemente im Grundsatz. 124
87. Raum und Denken 124
88. Der erkenntnisskritische Idealismus 125
89. Aenderung der Correlation von Sinnlichkeit und Denken . . . 128
90. Aenderung der Correlation von Raum und Zeit. 130
91. Reine und angewandte Mathematik 131
92. Das Infinitesimale als Grund und Werkzeug des realen Gegenstandes 133
93. Die systematische Ueberschätzung der Atomhypothese 134
94. Die unausgedehnten Punkte 136
95. Ausdehnung und Masse 138
96. Fechners Unendlichkleines 139
97. Form und Bestimmungspunkte 141
98. Methodischer Vorzug des Infinitesimalen vor dem Atom . . . 142
99. Das Endliche und das bestimmte Integral. 144
100. Die intensive Realität und das Ding an sich. 145
101. Die Ordnungen des Infinitesimalen und die Qualitäten 146
102. Ein Element des Bewusstseins als unmittelbarer Vertreter der Realität 148
103. Die Vorstellung nicht Element 150
104. Die Empfindung als Einheit 151
105. Empfindung und Wissenschaft 152
106. Das Problem der Psychophysik. 154
107. Die Ebenmerklichkeit 155
108. Das Interesse der Psychophysik 156
109. Die psychische Elle 158
110. Die Empfindung als Function des Reizes 159
111. Der Sinn der infinitesimalen Analysis 160

I. Einleitung.

1. Die Begründung des Infinitesimalbegriffs ein Problem der Philosophie. — Die Begründung des Infinitesimalbegriffs ist in zwiefacher Hinsicht ein Anliegen der Philosophie. Erstlich ist das Gewissen der traditionellen Logik nicht beruhigt, bevor sie diesen Grundbegriff der mathematischen Naturwissenschaft, soweit ihre Mittel reichen, beschrieben und nach ihren Normen erklärt hat. Ferner aber bleibt in dem Verzeichniss der Grundlagen und Grundsätze der Erkenntniss eine unersetzliche Lücke, solange dieses fundamentale Werkzeug als eine Voraussetzung des mathematischen und demzufolge des Natur-Erkennens nicht anerkannt und abgegrenzt ist.

Und diese beiden Rücksichten unterstützen einander. So lange nämlich die Begründung des Infinitesimalbegriffs lediglich in der Logik gesucht wird, muss der Mangel solcher Begründung empfindlich bleiben, — trotz aller der unzähligen Versuche, die seit der Erfindung des Calculs stets von Neuem zu seiner logischen Rechtfertigung unternommen worden sind. Der Begriff der infinitesimalen Grösse kann daher als ein eindringliches Beispiel gelten für die Nothwendigkeit der Ergänzung der Logik durch ein anderes, verwandtes, aber zu unterscheidendes Untersuchungsgebiet.

2. Die in der Grenz-Methode enthaltenen Voraussetzungen. — Die Begründung des Infinitesimalbegriffs wird auch in selbständigem internem Verfahren versucht mit eigenen mathematischen Begriffen. Dabei werden jedoch Voraussetzungen als angeblich logische gemacht, welche ausserhalb des Bereichs der Logik fallen. Seit D'Alembert pflegen die Mathematiker die Infinitesimal-Rechnung in der Methode der Grenzen zu begründen. Diese aber besteht in dem Gedanken, dass der elementare Begriff der Gleichheit durch den exacten

Begriff der Grenze ergänzt werden müsse. Es wird somit erstlich der Begriff der Gleichheit vorausgesetzt. Gleichheit aber liegt schon nicht mehr innerhalb der Logik. Was der Gleichheit logisch entspricht, heisst Identität. Gleichheit bezeichnet ein Verhältniss von Grössen. Auf diesen Unterschied hat bereits Carnot hingewiesen, indem er égalité als rapport von identite als relation unterscheidet.[1]) Mithin setzt die Grenz-Methode zweitens den Begriff der Grösse voraus. Auch dieser Begriff liegt jenseit der Logik.

Indessen wird in dem vorausgesetzten Grössenbegriffe zugleich die Voraussetzung der Grenz-Grösse gemacht. Die in der elementaren Grössenlehre definirte Gleichheit berücksichtige jene Grenz-Grössen nicht. Grössen gelten derselben als gleich, wenn und obzwar ihr Unterschied in einer Grenz-Grösse besteht. Daher müsse — dies ist der Gedanke des Grenz-Methode — der elementare Begriff der Gleichheit durch den exacten Begriff der Grenze nicht sowol ergänzt, als corrigirt werden. Die Gleichheit ist als eine Vorstufe des Grenz-Verhältnisses zu betrachten. Ohne diese Geltung der Correctur würde der Grenzbegriff bittweise eingeführt. Somit wird von der Grenzmethode drittens derjenige Begriff vorausgesetzt, durch welchen die Rechnung begründet werden soll. Diese Voraussetzung ist keine Erschleichung; denn der Begriff wird definirt. Aber die Einführung und Definition liegt jenseit der Logik. Und da die Mathematik überall eine über die Definitionen und Axiome hinausgehende Begründung ihrer Begriffe weder leisten kann noch leisten soll, so fällt die Begründung des auch in der Grenzmethode vorausgesetzten Grundbegriffs einem Untersuchungsgebiete zu, welches von der Logik unterschieden werden muss.

3. Der Grenzstreit von Anschauung und Denken liegt jenseit der Logik. — Gleichheit und Grösse setzen die Anschauung voraus. Der Logik aber gehört nicht einmal mehr die Unterscheidung von Denken und Anschauung an; wie sollte derjenige Begriff vor ihr Forum gehören, dessen Schwierigkeit in dem Grenzstreit zwischen Denken und Anschauung liegt. Mithin ist die Definition des Infinitesimalbegriffs

---

[1]) Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal. An V. (1797) § 42.

bedingt durch die Festsetzung der Grenzen von Anschauung und Denken oder genauer, durch die Bestimmung der durch Anschauung und Denken a potiori bezeichneten Methoden. Die Anschauung wie das Denken sind Abbreviaturen für wissenschaftliche Methoden, und zwar für solche, welche von dem besondern Inhalt der Forschung, auf die sie sich beziehen, dermassen unabhängig sind, dass sie vielmehr allgemeine Voraussetzungen aller wissenschaftlichen Forschung bilden.

4. Unterschied von Logik und Erkenntnisstheorie. — Die Grenzberichtigung solcher allgemeinen Methoden, vielmehr der Bedingungen zu den wissenschaftlichen Methoden aller Art muss der Logik ausdrücklich abgenommen werden; denn die Logik hat lediglich die von der Anschauung abgetrennten Denk-Verhältnisse zu untersuchen. Alle Hilfe, welche die Logik dem Erkennen zu leisten vermag, beschränkt sich daher streng und ausschliesslich auf die Sicherung des Erkennens von Seiten derjenigen Grundlagen desselben, welche im Denken gelegen sind. Solche Sicherung ist unentbehrlich; sie lehrt Irrungen vermeiden, welche bei der Operation mit den Denk-Gebilden begegnen können, und sie fördert Bestimmtheit in der Gestaltung derselben. So wird die rührende Anklammerung an die Logik begreiflich als an eine selbständige Disciplin. Andererseits aber ist die Sicherung nur negativ. Daher die unkluge Verdächtigung der Logik als einer formalen Wissenschaft: als ob, was den gesammten Inhalt der Erkenntniss, wie sehr derselbe in sich verschieden ist, von Seiten der Denk-Mittel zu sichern die Aufgabe hat, zugleich auch alle die anderen Mittel des Bewusstseins enthalten müsste, welche die Erkenntniss mit ihrem objectiven Inhalte erzeugen und gewährleisten.

Zu diesen anderen Mitteln des Bewusstseins gehört die Anschauung, welche der Logik fremd ist, welche jedoch im Erkennen mit den Denk-Mitteln sich verbinden muss. Alle diese zwar engeren, aber positiveren Voraussetzungen des in der Verbindung von Anschauung und Denken arbeitenden Erkennens bilden das Gebiet einer besondern Untersuchung, für welche in neuerer Zeit der Titel der Erkenntnisstheorie in allgemeinere Aufnahme gekommen ist.

5. Zusammenhang von Wissenschaft und Erkenntnisstheorie. — Dieser Name ist wohlgeeignet, die Aufgaben, die er zusammenfasst, von der mit der Vorstellung und Anmassung des Organon behafteten Logik zu unterscheiden, indem er auf den Unterschied von Denken und Erkennen hinweist. Die Aufgaben des Erkennens erfordern eben noch andere Mittel und Zurüstungen, als die der Denk-Gesetze. Es wäre nun aber gänzlich verkehrt, das Bewusstsein von diesen anderweiten Bedürfnissen erst der neuern Zeit zuzusprechen, in welcher dieser Titel populär geworden ist. Vielmehr sind diese ferneren Bedürfnisse von altersher empfunden worden. Descartes und Leibniz zumeist haben unter diesen Bedürfnissen gearbeitet und gerungen. Aber gerade Leibniz leidet auch zumeist an der Ueberschätzung der Logik, welche ihm als das Muster und als die einzige Instanz apriorischer Vernunft gilt. Er überspannt daher die Leistungskraft der Logik; aber er entzieht ihr keine der sein universales Forschen bewegenden Aufgaben. Er begeht den Fehler, die Gesetze der Logik unmittelbar und als solche auf die Probleme der Mathematik zu erstrecken; aber immerhin behauptet und betont er damit den Zusammenhang von Logik und Wissenschaft als das Problem seiner wie aller Philosophie. Seine Methode freilich, dieses Problem zu lösen, ist unzulänglich; und gerade dieser Methode, die apriorischen Wahrheiten des Wissens zu entwerfen, stellt sich die neue, engere Art von Logik entgegen. Nur gilt es, den Begriff dieser neuen Untersuchungsweise so zu fassen, dass geleistet werde, was Leibniz erstrebt hat — nicht aber mit dem so sachlich wie historisch kläglichen Erfolge, dass ignorirt und vereitelt wird, was jener mächtige Genius in die Wissenschaft und zu deren Begründung in die Metaphysik eingeführt hat.

6. Unterschied von Erkenntnisstheorie und Psychologie. — Diejenigen verwirren daher mit dem Namen die Sache, welche Leibniz gegenüber und überhaupt von Locke'scher Erkenntnisstheorie reden. Gegen Locke vielmehr ist Leibniz durchaus in dem Rechte des die weiten Bedürfnisse des Wissens in ihrer Wurzel zusammenfassenden Denkers. Locke dagegen zergliedert den Seelen-Apparat des Erkennens, und sofern wir seiner Kunst Vertrauen schenken, hat er wirkliche und wichtige Mittel und Kräfte blosgelegt. Psychologie aber, auch die beste,

ist nicht das Kraut, das gegen die Anmassungen der Logik gewachsen ist; und der Sensualismus ist überall nur Psychologie. Erkenntnisstheorie aber darf nicht als Psychologie gemeint sein. Denn die Psychologie setzt selbst jene Erkenntnisstheorie voraus, in dem Begriffe des Bewusstseins wie in dem der Materie, wie demgemäss in den Empfindungen und den Reizen.

7. Bedenken gegen den Titel Erkenntnisstheorie. — Desshalb muss ich an dem Namen Erkenntnisstheorie Anstand nehmen: weil er die Vorstellung erweckt, dass die Erkenntniss als ein psychischer Vorgang den Gegenstand dieser Untersuchung bilde, welche als psychologische Zerlegung des Erkenntnissapparates sich zur Theorie abzurunden vermöge. Diese Ansicht ist grundfalsch; denn auf dem Wege psychologischer Analysen kann man nicht zu derjenigen Gewissheit gelangen, welche für die auf diesem Gebiete behandelten Fragen erforderlich ist. Psychologie entwirft die Beschreibung des Bewusstseins aus seinen Elementen. Diese Elemente müssen daher hypothetische sein — und bleiben, dieweil dasjenige, womit in Wahrheit das Bewusstsein beginnt und worin es entspringt, kein mit Bewusstsein Operirender auszugraben und festzustellen vermag. Nehme ich hingegen die Erkenntniss nicht als eine Art und Weise des Bewusstseins sondern als ein Factum, welches in der Wissenschaft sich vollzogen hat und auf gegebenen Grundlagen sich zu vollziehen fortfährt, so bezieht sich die Untersuchung nicht mehr auf eine immerhin subjective Thatsache, sondern auf einen wie sehr auch sich vermehrenden, so doch objectiv gegebenen und in Principien gegründeten Thatbestand, nicht auf den Vorgang und Apparat des Erkennens, sondern auf das Ergebniss desselben, die Wissenschaft. Alsdann wird die Frage nahegelegt und unzweideutig: aus welchen Voraussetzungen dieser Thatbestand der Wissenschaft seine Gewissheit ableite. Denn dass solche Voraussetzungen walten müssen, das muss von vornherein eingesehen werden; wenngleich das klare Bewusstsein von denselben nicht mitzuwirken braucht. Die Axiome der Mathematik sind auch erst ausgeschieden worden aus dem Inhalt der mathematischen Forschung, als derselbe bereits stattlich sich ausgebaut hatte. Ohne solche latente Grundlagen aber hätte die Mathemathik sich nicht entfalten können. So geht es mit allem Erkennen. Die Wissenschaft geht der Logik und deren Ergänzung vorauf. Auf den

Thatbestand der Wissenschaft richtet sich die Untersuchung der Erkenntniss, die Prüfung ihres Geltungswerthes und ihrer Rechtsquellen.

8. Erkenntnisskritik. — Ich möchte daher anstatt Erkenntnisstheorie den weniger missverständlichen Namen der Erkenntnisskritik setzen, und gedenke denselben fortan zu gebrauchen. Dieser Titel erinnert auch bestimmter an die bei aller historischen Vermittelung originale Entdeckung Kants; während der Ausdruck Erkenntnisstheorie an den von Kant verworfenen Ausdruck der Wissenschaftslehre erinnert. „Schon der Titel (Wissenschaftslehre) erregt, weil jede systematisch geführte Lehre Wissenschaft ist, wenig Erwartung für den Gewinn, weil sie eine Wissenschaftswissenschaft und so ins Unendliche andeuten würde.“[1]) Während Kant selbst aber noch mit psychologischen Vorstellungen und Zumuthungen kämpft, so objectiviren wir in seinem Sinne, in dem Geist und Buchstaben des kritischen Systems die Vernunft in der Wissenschaft. Kritik der Vernunft ist Kritik der Erkenntniss oder der Wissenschaft. Die Kritik entdeckt das Reine in der Vernunft, insofern sie die Bedingungen der Gewissheit entdeckt, auf denen die Erkenntniss als Wissenschaft beruht.

9. Erkenntnisskritik der wissenschaftliche Idealismus. — Somit unterscheidet die Erkenntnisskritik den Kantischen von allem sonstigen Idealismus, und bestimmt und verdeutlicht den Gehalt des Transscendentalen. Der Idealismus überhaupt löst die Dinge in Erscheinungen und Ideen auf. Die Erkenntnisskritik hingegen zerlegt die Wissenschaft auf die Voraussetzungen und Grundlagen, die in ihren Gesetzen und für dieselben angenommen werden. Der erkenntnisskritische Idealismus hat also nicht sowol Dinge und Vorgänge, auch nicht solche des Bewusstseins schlechthin, sondern wissenschaftliche Thatsachen zu seinen Objecten. Wenn anders nun die letzteren überhaupt die einzig statthaften Vorwürfe solcher Untersuchungen sind, welche auf den Rechtsgrund der Gewissheit gerichtet werden, so ist der erkenntnisskritische Idealismus die wissenschaftliche Form des Idealismus, die mit dem Begriffe des Transscendentalen erreicht worden

[1]) Kant an Tieftrunk vom 5. April 1798. WW. ed. Rosenk. XI. a. 190.

ist. Denn das Transscendentale bezieht sich auf die Möglichkeit einer Erkenntniss, welcher der Werth apriorischer oder wissenschaftlicher Geltung zukommt. Die Erkenntnisskritik ist somit gleichbedeutend mit der transscendentalen Logik; denn ihre Aufgabe ist die Entdeckung der synthetischen Grundsätze oder derjenigen Grundlagen des Erkennens, auf welchen die Wissenschaft sich aufbaut, und von deren Geltung sie abhängt. Die Voraussetzung solcher Grundlagen ist keineswegs dogmatisch; sondern umgekehrt ist der Verdacht des Dogmatismus, sofern derselbe auf jene Annahme sich bezieht, ein Symptom des Dogmatismus. Annahmen und Voraussetzungen müssen der Wissenschaft zu Grunde liegen; denn ohne latente Basirung kann kein Lehrgebäude aufgerichtet werden; alle Entwickelung von Sätzen setzt Grundsätze voraus. Daher ist der Plan der transscendentalen oder der Erkenntnisskritik ein natürlicher und methodischer: was die Wissenschaft zur Wissenschaft macht, welche Bedingungen ihrer Gewissheit sie voraussetzt, von welchen Grundsätzen ihre Wirklichkeit nach ihrem angenommenen Werthe als Wissenschaft ermöglicht wird — das ist die natürliche Frage aller Philosophie; das ist das Problem der in Kant reif gewordenen Philosophie.

10. Die historische Vorbedingung der Erkenntnisskritik. — Diese Reife der Philosophie war mit dem Reifen der Wissenschaft gekommen, die mit Galilei beginnt, und mit Newton sich abschliesst. Seit Newton giebt es eine auf Principien erbaute, ihrer Grundlagen und Voraussetzungen bewusste und nach mathematischer Methode sich fortzeugende Wissenschaft. Es war nun erst das Object gegeben, auf welches die transscendentale Frage nach der Möglichkeit apriorischer Erkenntniss gerichtet werden konnte. Leibniz selbst arbeitet noch mit an der Hervorbringung dieser Wissenschaft; er hat das Ideal einer solchen sicher im Auge, aber es gelingt ihm nicht, dasselbe in den selbstgezogenen Schranken mathematischer Naturerkenntniss zu realisiren. Es mochte in dieser Richtung Newton von Leibniz ähnlich denken, wie einst Galilei von Kepler: „Ich schätze Kepplern wegen seines freien und tiefen Geistes überaus hoch, aber seine Art zu philosophiren ist nicht die meinige.“[1]) Wir wissen wenigstens

[1]) Vgl. Apelt, Epochen der Geschichte der Menschheit Bd. I. S. 257.

von Leibniz, wie er die Grundbegriffe von Newtons Mechanik verwirft, und sonach die mathematische Naturwissenschaft nicht zu systematisiren vermag. Wir begreifen dieses Misslingen gerade aus seinem grösseren Verlangen: er wollte die Mathematik und alle Naturerkenntniss in die Paragraphos der Logik zwingen; jene aber erwuchsen auf eigenem Grunde, aus nichtlogischen Principien. So auch musste sich ihm das Problem der Erkenntnisskritik verschieben; denn für ihn gab es Erkenntniss nur in dem allgemeinen, unbestimmten, nicht in dem eingeschränkten, aber präcisen Sinne.

11. Die Begründung des Infinitesimalbegriffs Problem der Erkenntnisskritik. — Indessen, obzwar Leibniz Erkenntniss im Begriffe der mathematischen Naturwissenschaft und Erkenntnisskritik im transscendentalen Sinne systematisch nicht geltend macht, so hat er doch jene Erkenntniss durch seine Entdeckung mithervorgebracht, und zwar vorzugsweise durch dieselbe: durch die des Infinitesimalbegriffs. Die Begründung desselben, die sonach logisch nicht geführt werden kann, muss daher der Erkenntnisskritik anheimfallen; das will sagen, als ein Theil und Beispiel desjenigen Problems behandelt werden, welches Kant in seinem neuen Begriffe der Erfahrung oder der mathematischen Naturwissenschaft aufgestellt hat. Als in einem der Grundbegriffe, als in einer der Bedingungen für die Möglichkeit der Erfahrung enthalten, muss sonach dieses mächtigste Werkzeug derselben erörtert werden, wenn anders sein Begriff begründet werden soll.

Es könnte das Bedenken entstehen, dass, indem der Infinitesimalbegriff erkenntnisskritischer Begründung unterzogen wird, derselbe damit dem heimischen Gebiete entrückt, und seine Rechtfertigung abhängig gemacht würde von einer Untersuchung, welche mit fremden Begriffen und nach fremden Normen die gesuchte Legitimation führe. Dem ist jedoch nicht so. Weder wird der Infinitesimalbegriff, sofern er erkenntnisskritisch begründet werden soll, dem Zusammenhang der mathematischen Probleme entzogen, noch auch setzt diese Begründung voraus, dass das ganze System der Erkenntnisskritik zu diesem Behufe abgewickelt werde. Der erste Punkt erledigt sich durch den Begriff der Erkenntnisskritik. In dem Zusammenhang der Bedingungen und allgemeinen Vorwürfe mathemati-

scher Erkenntniss muss der Infinitesimalbegriff betrachtet werden, wenn er erkenntnisskritisch begründet werden soll. Der zweite Punkt hingegen fordert ausführlichere Erwägung.

12. Verhältniss der erkenntnisskritischen Discussion eines einzelnen Begriffs zu dem erkenntnisskritischen System. — Die erkenntnisskritische Behandlung eines einzelnen Grundbegriffs oder Grundsatzes setzt keineswegs die vollständige Ausführung des erkenntnisskritischen Systems voraus. Vielmehr kann die erkenntnisskritische Discussion bei jedem Punkte, bei jedem Grundsatz beginnen. Vergegenwärtigen wir uns zunächst den Vortheil dieses Umstands. Es ist einleuchtend, dass somit von den verschiedenen Problemen aus, welche die einzelnen Wissenschaften darbieten, ein Zugang zur Erkenntnisskritik offenliegt. Einen Begriff aber enthalten alle wissenschaftlichen Gebiete in verschiedener Abstufung, den sie jedoch allesammt lediglich voraussetzen: das ist der Begriff des Gesetzes. Mit dem Grundsatz des Gesetzes, mit dem erkenntnisskritischen Orte für den Begriff desselben sollte daher zunächst alle Erkenntnisskritik zu beginnen haben. Sie thut es theilweise, sofern sie mit dem Begriffe a priori beginnt; aber nicht mit der erforderlichen Klarheit über die Voraussetzung, die in demselben für alle Wissenschaft enthalten ist.

13. Methodische Gleichwerthigkeit der erkenntnisskritischen Grundsätze. — Die Erkenntnisskritik besteht nun also zunächst in dem Nachweis derjenigen Bedingungen, auf denen die mathematische Naturwissenschaft beruht. Sicherlich darf in der Aufzählung und Gruppirung dieser Bedingungen nicht Willkür herrschen; die Ordnung derselben jedoch wird von keinem Gesichtspunkt geleitet, der objectiv ausschliesslich statthaft wäre. Vielmehr richtet sich dieselbe nach dem einzelnen Vorwurf und Gegenstand, der die Begründung fordert. Alle erkenntnisskritischen Grundsätze sind als solche gleichwerthig: daher kann mit einem jeden derselben die Reconstruction der wissenschaftlichen Erfahrung begonnen, und ebenso auch mit einem jeden beschlossen werden. Es ist wiederum in dem Begriffe der Erkenntnisskritik gegeben, dass Beides thunlich ist. Handelte es sich um einen psychologischen Nachweis, so könnte jede Quelle und jedes Element der Erkenntniss

nicht zugleich als höchste Grundlage gelten. Wenn es darauf ankäme, dass die erkenntnisskritischen Grundbegriffe etwa im Geiste prädisponirt wären, so könnten sie nicht alle zugleich das A und das O bedeuten. Erkenntnisskritik aber ist nicht schlechthin auf den erkennenden Geist gerichtet, sondern auf den Inhalt der Erkenntniss. Mithin kann mit jedem Steine die Reconstruction des Fundaments begonnen werden; denn solange Ein Grundsatz fehlt, wankt das Ganze.

So sehen wir, wesshalb Beides, die Tauglichkeit als Anfang wie die als Abschluss zu dienen, gleicherweise erforderlich ist: Anfang und Abschluss fallen hier zusammen. Es könnte z. B. mit einem Grundsatze der Modalität, mit dem Begriffe der apodiktischen Nothwendigkeit so begonnen wie abgeschlossen werden, oder mit dem der Wirklichkeit, oder dem der Hypothese. Ebenso kann mit dem Grundsatz der Gemeinschaft, das will sagen mit dem Begriffe des Systems, oder mit dem der Substanz begonnen und abgeschlossen werden. Endlich könnte einer systematisch-methodischen Ansicht zufolge, in welcher sich die moderne mathematische Auffassung mit der pythagoreischen Zahlen-Begeisterung berühren würde, mit dem Ersten der Kantischen Grundsätze der Anfang wie der Abschluss versucht werden.

In der Charakteristik der einzelnen Grundsätze muss daher dies der leitende Gedanke sein: dass die Unersetzlichkeit und relative Unübertrefflichkeit eines jeden derselben ins Licht gestellt werde. Vor der Ueberschätzung eines jeden ist die Untersuchung schon äusserlich dadurch geschützt, dass neben ihm andere in nicht nur anerkannter, sondern stets mitzubedenkender Gleichwerthigkeit bleiben. Diese Aufgabe, den Einzel-Werth eines jeden Grundsatzes für das Ganze der Erkenntniss festzustellen, bringt die Erkenntnisskritik zu reichem, immerfort erhöhbarem Gehalte. Denn was die einzelnen Grundsätze zu leisten im Stande sind, lässt sich im Voraus nicht erschöpfen, noch absehen. Daher schützt dieser von aller Psychologie unterschiedene Charakter der Erkenntnisskritik dieselbe vor dogmatischer Verschränkung und Verknöcherung.

14. Unterscheidung und Charakteristik der einzelnen Grundsätze. — Andererseits ist die Sonderung der Grundsätze und die Musterung ihrer einzelnen Beiträge für den Gesammtwerth der Erkenntniss auch insofern von Nutzen:

dass die mannichfachen Ausdrücke für Erkenntniss-Werthe dadurch unterschieden und bestimmt werden können. Welcher Schaden an Einsicht wird nicht dadurch angerichtet, dass die Geltungswerthe im sittlichen und naturwissenschaftlichen Erkennen nicht streng genug auseinandergehalten werden: also Ideen im Unterschiede, wenngleich im Zusammenhang und Vergleich mit Grundsätzen. So herrscht Verwirrung bezüglich der Begriffe von Wahrheit, unmittelbarer Gewissheit und Denknothwendigkeit. Und innerhalb der mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundbegriffe werden Realität und Sein wie Substantialität und Wirklichkeit durchaus verwechselt. Auch darin zeigt sich die Noth der Erkenntnisskritik, dass Bedenken erhoben werden gegen einzelne Grundlagen, welche andere allein zu heben berufen sind, wie dies bezüglich des Problems der Anschauung zu Tage tritt. Aus allen diesen Erwägungen ergiebt sich die dringliche Nothwendigkeit, die Grundsätze zu sondern; und es kann nur dies Befremden erregen: dass so wenige Grundsätze im Stande sein sollen, das Fundament der gesammten Wissenschaft auszumachen.

15. Systematische und historische Ableitung des Infinitesimalbegriffs. — Diesen Zweifel hebt gerade derjenige Begriff, welchen wir hier als einem erkenntnisskritischen Grundsatze entsprechend begründen wollen. Der Infinitesimalbegriff macht es deutlich, welche reiche Anzahl von gedanklichen Wendepunkten und welche Fülle von fundamentalem Material in Einem Grundsatze geborgen sein kann. Thatsächlich zweifelt Niemand daran, dass der Infinitesimalbegriff eine so breite Grundlage bildet; aber dass diese Grundlage eine erkenntnisskritische sei, das wird über der vermissten logischen Bedeutung übersehen. Um nun jene durchsichtig zu machen, scheint es zweckmässig, diese systematische Aufgabe historisch anzufassen; und zwar ist diese Behandlungsweise unseres Problems ebensosehr im erkenntnisskritischen, wie im intern-wissenschaftlichen Sinne dienlich. Durch Vergegenwärtigung der wissenschaftlichen Verhältnisse, welche zur Entdeckung des Infinitesimalbegriffs geführt haben, eröffnen wir uns am sichersten das Verständniss seiner erkenntnisskritischen Bedeutung. Denn zu keinem andern Behufe haben Leibniz sein dx und Newton sein ẋo eingeführt, als zur Erweiterung und zur Befestigung derjenigen Erfahrung, welche Kant als mathematische Naturwissenschaft

zum Problem der Vernunftkritik macht. Hier muss die historische Orientirung förderlich sein, wie kaum an einem andern Punkte. Denn fast alle erkenntnisskritischen Grundbegriffe sonst reichen bis in das griechische Alterthum zurück; nicht bloss Substanz und Causalität, Möglichkeit und Wirklichkeit, sondern auch Raum und Zeit. Das Infinitesimale dagegen ist trotz seines Zusammenhangs mit der antiken Tradition ein durchaus moderner Begriff, dessen Ursprung und Entwickelung uns klar vorliegt: dessen Zusammenhang mit der philosophischen Speculation daher wol auch genau nachweisbar sein möchte.

16. Leibniz' Antheil an der Begründung des Infinitesimalbegriffs. — Zumal bei Leibniz muss ein solcher Zusammenhang vermuthet werden. Es wäre doch sicherlich ein sonderbarer Leitgedanke der historischen Arbeit, anzunehmen, dass Leibniz die eigentliche Beziehung ganz und gar entgangen sein sollte, welcher der Differentialbegriff angehört, den er — entdeckt hat. Ein Anderes ist es, die systematische Rechtfertigung eines Begriffs zu leisten, ein Anderes, den Zusammenhang und die Richtung der Probleme zu erkennen, welche durch einen Begriff bezeichnet werden. Die erkenntnisskritische Begründung erfordert Beides. Und freilich durch die Monadologie war die systematische Legitimation nicht zu erreichen. Aber so atomistisch können in keines Menschen Kopfe, geschweige in dem Hirn eines Genius die Gedanken bei einander lagern, dass der monadologische Metaphysiker um die charakteristischen Zeichen sich nicht gekümmert haben sollte, welche der Analyst und Geometer ersann und cultivirte. Es ist eine verkehrte Meinung, dass Newton zwar auf dem Wege seiner Forschungen dieses Instrument gebaut und geschliffen, also in seinem logischen Gebrauchswerthe erkannt habe, Leibniz dagegen in der Hauptsache nur ein bequemes und förderliches Zeichen selbständig hinzugebracht, für die logische Begründung des Verfahrens jedoch selbst die Richtung verfehlt habe. Diese Meinung ist nicht nur aller historischen Voraussetzung und, wie sich glücklicherweise zeigen lässt, den literarischen Urkunden widersprechend: sie ist zugleich aber auch geeignet, das natürliche Recht und den einzigen Sinn des Begriffs zu verdunkeln. Beide nämlich werden deutlicher bei Leibniz als bei Newton. Diesen Hauptpunkt hat selbst Gerhardt übersehen; denn durch den Nachweis, dass Leibniz den Algorithmus selbständig und

„fast zufällig“ entdeckt habe, wird der leidige Streit über den wahren Entdecker keineswegs in der Weise geschlichtet, welche der That Leibnizens gerecht wird. Nach Gerhardt aber ruht die Fluxionsrechnung Newtons „auf einem vollkommen sichern Fundament“, der Werth des Differentials hingegen besteht in der praktischen Nützlichkeit, welche mit der „unbestimmten Vorstellung des Unendlichkleinen“[1]) verbunden war. In der That ist Leibniz nicht nur der Entdecker jener glücklichen Bezeichnungsweise, sondern der Erfinder des Gedankens, der auf dem Wege seines gesammten Denkens und Rechnens lag.

17. Newtons Verhältniss zur Philosophie. — Und dieses Denken ist immerhin einheitlicher bei Leibniz zusammengefasst, als bei Newton. Wie sehr daher auch für Newton wie für Leibniz die Voraussetzung gilt, dass die Richtung, in welcher die Begründung zu erfolgen hat, von dem Entdecker nicht übersehen sein könne, so besitzen wir doch erstlich von Newton viel weniger gedruckte Bemerkungen zur Logik des Fluxionen-Calculs, als nunmehr von Leibniz bezüglich seines Differentialbegriffs; vor Allem aber ist es bekannt, wie Newton für die Charakteristik der Kräfte aller „Hypothesen“ nachdrücklich sich enthalten, und die Geometrie selbst als die genauere Mechanik bezeichnet hat. Sein Entdeckergeist hat nichtsdestoweniger solide Hypothesen ersonnen und der sogenannten Erfahrung durchaus entlegene Zaubermittel der Analysis zu bewunderter synthetischer Darstellung gebracht. Aber es ist begreiflich, dass die Frage: was im Zusammenhange des Denkens ein Begriff zu bedeuten habe, eine weniger ergiebige Behandlung bei dem Manne erfahren haben werde, welcher aus Scheu vor den verborgenen Qualitäten und vor den „Hypothesen der Cartesianer“ alles apriorische Voraussetzen, alles schöpferische Disponiren, kurz das Zugrundelegen reiner Begriffe mit der grossartigen Einseitigkeit eines weltgeschichtlichen Standpunktes von sich fern gehalten hat.

18. Differential und Realität. — Wenn wir demnach vorzüglich bei Leibniz nach den Spuren und Keimen erkenntnisskritischer Begründung des Infinitesimalbegriffs und zwar vorzugsweise in demjenigen Material suchen, welches Gerhardt's Herausgabe zugänglich gemacht hat, so nähern wir

[1]) Die Entdeckung der höhern Analysis, 1855 S. 93; vgl. S. 62.

uns auf diesem historischen Wege der systematischen Aufgabe. Unsere Absicht nämlich ist der erkenntnisskritische Nachweis: dass jene vermisste logische Begründung des Differentialbegriffs in einem erkenntnisskritischen Grundsatze, und zwar in dem der Kategorie der Realität entsprechenden, mithin in dem Grundsatz der intensiven Grösse oder der Anticipationen enthalten sei. Um diesen Nachweis eingänglich zu machen, muss die Leibnizische Discussion und Terminologie beachtet und verstanden werden.

Denn ein solcher Versuch muss vor Allem dem Einwurf begegnen: wie es zu verstehen sei, dass Kant selbst eine so wichtige und allem Anschein nach neue Sache so wenig ausgeführt, um nicht zu sagen versteckt gehalten habe, während die Auseinandersetzung mit einem vergleichsweise so leichten Problem wie der Hume'schen Causalität zu stets neuen Anknüpfungen ihn gereizt hat. Dieser alle unbefangene Aufnahme unseres Versuches störende Einwand wird am bestimmtesten von vornherein durch die späterhin zu erweisende Erinnerung beseitigt: dass die Identität der intensiven und der unendlichkleinen Grösse zu Kants Zeiten eine allgemeine Annahme war. In dieser Beziehung brauchte also Kant nicht ausführlicher zu sein. Aller Nachdruck war vielmehr auf den Gedanken zu legen: dass die Leistung der intensiven Grösse der Bedingung der Realität entspreche; dass derjenige Geltungswerth, welcher der Forderung und Voraussetzung der Realität Genüge leistet, in dem Grundsatz des Grades gewährleistet werde, durch welchen die Verbindung von Mathematik und Naturwissenschaft thatsächlich gestiftet und innerlich begründet wird.

Hierin besteht das Neue, das Kant zu lehren hatte: Realität liegt nicht in dem Rohen der sinnlichen Empfindung und auch nicht in dem Reinen der sinnlichen Anschauung, sondern muss als eine besondere Voraussetzung des Denkens geltend gemacht werden, gleichwie Substanz und Causalität, als eine Bedingung der Erfahrung, die derselben nur entnommen werden kann, sofern sie ihr zu Grunde gelegt, für ihre Möglichkeit vorausgesetzt wird. Darauf musste es Kant ankommen, die Realität als eine besondere Kategorie auszuzeichnen, im Unterschiede auch von der der Wirklichkeit.

19. Differential und intensive Grösse. — Für diesen Höhepunkt kritischer Naturerkenntniss bildet die Charakteristik der infinitesimalen Grösse als intensiver die nothwendige Vermittelung; denn die kritische Bedeutung der Realität wird vorzugsweise an der infinitesimalen Intensität durchgeführt. Und diese Gleichwerthigkeit des Differentialen und des Intensiven ist bei Leibniz ausgesprochen, seinen Correspondenten geläufig, und im Wolfschen Zeitalter ein bei den bekannteren Autoren sich wiederholender Paragraphensatz.

20. Intensiv und Inextensiv. — Wir treten nunmehr sogleich medias in res, indem wir an dieser Gleichsetzung uns zu orientiren suchen. Denn wie vag und zweideutig der heutige Gebrauch des Intensiven genannt werden muss, wie schon darin sich zeigt, dass es insbesondere mit der Intensität fast durchgängig verwechselt wird: im 17. Jahrhundert scheint das Intensive vornehmlich das Inextensive bedeutet zu haben. Damit aber kommen wir sogleich zu dem Kernpunkt der Frage: dem Verhältniss von Anschauung und Denken im Differentialbegriff. Die Bestimmung dieses Verhältnisses soll nach erfolgter historischer Ermittelung noch genauer in Bezug auf das gegenseitige Verhältniss der beiden Arten der Anschauung versucht werden; vorerst jedoch seien die allgemeinsten Bedenken erwogen.

21. Anschauung und Denken sind erkenntnisskritische Abstractionen. — Das Unendlichkleine entzieht sich der Bedingung der Anschauung — und in Anschauung muss alle Erkenntniss darstellbar sein. Der Widerspruch steigert sich, indem das Unendlichkleine, obschon es der Anschauung nicht theilhaft wird, nichtsdestoweniger der Anschauung dien und vorzugsweise an den Interessen derselben, insbesondere dem Tangenten-Problem entstanden ist. Dieser angebliche Widerspruch kann durch eine elementare erkenntnisskritische Erinnerung gehoben werden, die von jedem Standpunkt aus zugegeben werden wird. Es ist ein Irrthum, weil alle Erkenntniss in der Anschauung darstellbar sein muss, darum auch alle anderen Mittel, Bedingungen und Grundlagen der Erkenntniss ihrerseits der Anschauung zu unterwerfen. Die Anschauung ist nach der allgemein recipirten Kantischen Lehre eine Quelle der Erkenntniss, ebenbürtig dem Denken, also ist

das Denken nicht minder eine solche Erkenntnissquelle. Für jede gegenständliche Erkenntniss müssen die beiden Erkenntnissquellen sich verbinden; jede specielle Erkenntniss ist durch diese Verbindung beider Erkenntnissmittel bedingt. Eine Erkenntniss von objectivem Umfang kann weder allein durch Anschauung, noch allein durch Denken zu Stande gebracht werden. Aber in diesem methodischen Satze ist zugleich deutlich ausgesprochen, dass Anschauung und Denken nicht selbst auch Erkenntnissobjecte, sondern lediglich erkenntnisskritische Abstractionen sind.

Der Werth dieser Abstractionen besteht offenbar in der Reinheit ihrer Bestimmung und Behandlung. Die Abstraction der Anschauung ist um so wissenschaftlicher, strenger, mithin beziehungsmächtiger, je bestimmter ihre Merkmale von denen des Denkens unterschieden und abgetrennt gehalten werden können. Dasselbe Erforderniss gilt für die Abstraction des Denkens: dass sie mit keinerlei Elementen der Anschauung vermischt und verunreinigt werde. Denn wenn in der That die genannten Abstractionen die nothwendigen und zureichenden formalen Bedingungen aller Erkenntniss sind, so fordert der Begriff der Abstraction, dass eine jede als solche selbständig in sich bestimmt werde.

22. Leistung des Denkens in dem Infinitesimalbegriff. — Während nun die Bedingung der Anschauung nur in zwei Unterarten sich vertheilt, so ist die Bedingung des Denkens in einer grösseren Anzahl von Grundbegriffen specialisirt. Eine solche Kategorien-Specialität bildet der Begriff der Qualität, dem die der Realität und der Limitation untergeordnet sind. Wenn nun das Infinitesimale dieser Kategorien-Art entspricht, der Forderung der Realität gerecht zu werden geeignet sein soll, so ist es begreiflich, dass es der Anschauung entzogen sein muss, wenn anders die Realität einen „reinen Verstandesbegriff", eine Bedingung der Erfahrung von Seiten des Denkens zu bedeuten hat.

Man kann nun einwerfen, dass diese Verwerthung der Kategorie, des reinen Grundbegriffs der Erfahrung für wie sehr immer umfassende, so doch specielle wissenschaftliche Probleme nur erst kraft Ueberführung der Grundbegriffe in die Grundsätze verstattet werde. Die Realität als Kategorie ist nicht schon an sich das Infinitesimale, sondern

erst die Ausführung der Kategorie zum synthetischen Grundsatz kann diese Deutung möglich machen und sofern es gelingt, rechtfertigen. Im Grundsatze aber muss ja Anschauung und Denken bereits verbunden sein. Also müsse die Infinitesimalgrösse, sofern sie einem Grundsatze entspricht, auch anschaubar sein.

Sehen wir von der Kantischen Terminologie ab, wenigstens soweit in unserer modernen Ausdrucksweise und zum Einvernehmen mit derselben eine Emancipation von ihr möglich ist — so dürfte der Einwand sich folgendermassen bestimmen lassen. Das Unendlichkleine sei keineswegs ein formales Gebild des Denkens, etwa wie Bejahung und Verneinung, sondern als ein Grössenbegriff der Wissenschaft von den Grössen zugehörig. Grösse aber setzt Anschauung voraus und somit entspringe die infinitesimale Grösse der Anschauung, der sie dennoch — und das ist der Widerspruch in ihrem Begriffe — sich entziehen muss.

Indessen muss auch dieser Formulirung gegenüber der obige Satz wiederholt werden: dass der Einwurf auf einer Verwechselung materieller Erkenntniss mit formaler Erkenntniss-Bedingung beruhe. Wollten wir diese Unterscheidung an dem Unterschiede von Grundbegriff und Grundsatz beleuchten, so würde die Bedeutung des Schematismus zu erklären sein. Da wir jedoch von der genauern Terminologie der Kantischen Schulsprache hier Abstand nehmen, so soll an denjenigen Ausdrücken, welche die moderne wissenschaftliche Sprache von Kant recipirt hat, eine genauere Bestimmung versucht werden. Eine solche ist unumgänglich, wenn Termini, welche einer systematischen Lehrverfassung angehören, von derselben abgelöst und in einen allgemeinen, von Autor zu Autor, und oft bei demselben Autor schwankenden Sprachgebrauch entlassen werden.

23. Anschauung ein Kantischer Terminus. — Dieses Schicksal ist dem Kantischen Grundbegriffe der Anschauung widerfahren, freilich und selbstverständlich nicht ohne alle Schuld des Urhebers. Wer einen neuen Begriff schmiedet, der vermag niemals die ganze und volle Deutlichkeit desselben, seine vielfachen Unterschiede von denjenigen Begriffen, in deren Zusammenhang er verflochten bleibt und bleiben soll, zur unzweideutigen Darstellung zu bringen. Die Verhältnisse der reinen Anschauung zur empirischen, und innerhalb der reinen wieder der äussern zur innern sind so fein und zweischneidig, und die Bestimmung

derselben ist so innig mit der gesammten Aufgabe und mit den weit verzweigten Interessen der Vernunftkritik verwachsen, dass Niemand, der sich auf Stilfragen bei den Auserwählten versteht, eine compendiöse Klarheit hier erwarten wird. Erst im Aufbau des Systems müssen sich die einzelnen Steine an einander glätten und abgrenzen; während der eigenen Zubereitung können sie nicht schon zu schulgerechter Definition gelangen. Um so nothwendiger ist es daher, wenn Spätere den Ausdruck annehmen, die Vorsicht dabei zu gebrauchen, welche mehr beinahe als bei einem Worte der Umgangssprache dem Terminus eines fremden Systems gegenüber geboten ist. Diese Vorsicht hat unser Zeitalter an dem Worte Anschauung nicht geübt, vielmehr den Ausdruck, als ob er selbstverständlich wäre, in den eigenen wissenschaftlichen Gebrauch genommen.

24. Anschauung als Anschauen. — Die Anschauung ist eines der bedeutsamsten und fruchtbarsten Worte unserer wissenschaftlichen Sprache, mit dem weder Intuition, noch Imagination sich messen können; trotzdem aber scheint insbesondere die Endung des Wortes zu einer ungenauen Ansicht zu verleiten, aus welcher schwere Fehler hervorgehen. Anschauung im Sinne des erkenntnisskritischen Terminus darf nämlich nicht gedacht werden als eine concrete, auf einen Gegenstand bezogene Erkenntniss, sondern lediglich als ein Erkenntnissmittel, als das Element einer Methode. Die Anschauung darf als nichts Anderes gedacht werden, denn als Anschauen. Anschauung bedeutet das vom Denken zu unterscheidende Verfahren, welches in jeder einzelnen Anschauung mit dem Denken sich verbündet haben muss. Die Anschauung als erkenntnisskritischer Terminus ist das Element einer Erkenntniss, nicht selbst eine solche. Bezüglich des Denkens ist schon durch den gäng und gäbe gewordenen Unterschied von Denken und Erkennen diese Einschränkung verständlich. Ebenso aber sollte man Anschauen und Erkennen unterscheiden, während die objective Anschauung ein Erkennen ist, welches durch Anschauen und Denken bedingt wird.

25. Anschauung Bezogenheit des Bewusstseins als auf ein Gegebenes. — Demgemäss ist an dem erkenntnisskritischen Element der Anschauung eine weitere Abstraction zu vollziehen, durch welche die zweideutigen Zusammenhänge der reinen Anschauung mit der empirischen zerrissen werden.

Wenn anders, was man reine Anschauung nennen darf, die mathematische Anschauung zu bedeuten hat, im Unterschiede von der physisch-psychischen schlechthin, so ist es durch den Inhalt des Begriffes derselben geboten, dass er das Infinitesimale in seinen Umfang aufnehme. Um dies leisten zu können, muss der Begriff der Anschauung eine Determination erhalten, welche seine Tendenz, die allgemeine mathematische Gesetzlichkeit zu charakterisiren, bestimmter und schärfer zum Ausdruck bringt; und dabei muss die Vorsicht getroffen werden, die Anschauung im Unterschiede von der Erkenntniss als ein Element derselben zu bestimmen.

Zu einer solchen genauern Fassung fordert schon der Umstand auf, dass die Anschauung, und zwar wiederum im allgemein wissenschaftlichen Sprachgebrauche, als Gattungsbegriff für eine innere und äussere gilt. Also auch eine nicht auf den Raum bezogene Anschauung erkennen wir an. Also ist Anschauung nicht ausschliesslich auf Extension bezogen, sondern bedeutet zum mindesten auch successive Protension, also ein Beiden Gemeinsames.

Auf dieses Gemeinsame, und damit auf die eigenthümliche Art des Anschauungs-Inhalts, gegenüber dem des Denkens, kommt man vielleicht am eindringlichsten, wenn man unter den Modificationen des Denkens auf die Negation achtet. Diese liegt uns doch nicht, wie dem Aristoteles, in den Dingen; sondern, wie zwar Alles auf ein Etwas bezogen sein muss, an welchem die That des Denkens sich vollziehe, also auch die Negation auf ein zu negirendes Etwas, so ist doch die Beziehung auf dieses Etwas eine gänzlich andere als diejenige, welche in dem Element der Raum- oder Zeit-Anschauung ausgezeichnet wird. Das Etwas, auf welches die Anschauung bezogen ist, gilt uns in einem solidern Sinne derselben dargestellt, als in welchem es in der Negation gedacht wird, — und als Operation des Denkens objectivirt die Verneinung gerade so gut wie die Bejahung.

Könnte man von diesem Unterschiede absehen, der in der Art des Bezogenseins auf ein Etwas zwischen Anschauung und Denken besteht, so dürfte man den Unterschied zwischen Anschauung und Denken getrost antiquiren. Im Uebrigen ist diese Unterscheidung nämlich mit vielerlei psychologischem und, was schlimmer ist, erkenntnisskritischem Aberglauben behaftet; daher die Metageometer das Denken in die Anschauung hineinziehen zu

müssen glauben, und andererseits ebenfalls in einem vermeintlichen Gegensatze zu Kant das Denken mit der Anschauung beschwängert wurde. Der Werth dieser Distinction, ihre erkenntnisskritische Brauchbarkeit liegt in der That in nichts Anderem, als in der Hervorhebung dieser Verschiedenheit in der Beziehung des Bewusstseins auf das transitive Etwas. In dem Element der Anschauung wird das Etwas als ein Gegebenes Inhalt des Bewusstseins. Diese Beziehung des Bewusstseins auf ein Gegebenes, das will sagen, auf ein X als ein Gegebenes, nennen wir Anschauung.

Man darf nun aber nicht etwa meinen, diese Gegebenheit recurrire auf ein Land oder Gebiet jenseit des Bewusstseins, auf welchem jenes Etwas der Anschauung gegeben wäre. Das Gegebene ist in dem Bewusstsein gegeben; dieser Grund und Boden ist solide genug, die Anschauung und somit jenes Etwas zu legitimiren. Und das Mittel, jenen Boden zu bearbeiten und zu bebauen, das ist die reine, die mathematische Anschauung.

Auch darf man nicht fragen wollen: wie es zugehe, dass eine solche Bezogenheit des Bewusstseins auf ein Gegebenes stattfinde; denn diese Frage überschreitet die Grenzen wissenschaftlicher Wissbegier, weil sie nicht auf die Bedingungen und Arten des wissenschaftlichen Bewusstseins gerichtet ist, sondern auf die Möglichkeit des natürlichen Bewusstseins, der Bewusstheit. Es ist die eigentlich transscendente Frage. Auf alle statthaften Fragen nach dem Wie und Wo der Gegebenheit antworten die Arten und Bestimmtheiten der Anschauung als Raum und Zeit.

26. Das Infinitesimale im Verhältniss zur Zeit-Anschauung und zur Zahl. — Aus dieser Gleichsetzung von Anschauung mit Bezogenheit auf ein Etwas als Gegebenes, oder kurz mit Gegebenheit, ergiebt sich nun sogleich, dass das Unendlichkleine nicht nothwendig in der Raum-Anschauung gegeben sein müsse, da es ja Element der Anschauung bleiben würde, wenn es nur in der Zeit-Anschauung gegeben werden könnte, wenn es zwar inextensiv, aber protensiv, mithin successiv wäre. Man wendet vielleicht ein, dass das Infinitesimale doch vornehmlich an und zum Behuf der geometrischen Anschauung erdacht worden sei, wie es ja schon bei den Alten in derselben latent gewesen. Jedoch die wohlverstandene

Selbständigkeit der Geometrie dürfte nicht beeinträchtigt werden, wenn ein Moment, welches wir der Zeit zurechnen, zu ihrer Vervollkommnung beigetragen hat, wie ja doch der Grössenbegriff unbedingt die Zeit voraussetzt. Das Differential aber ist ebensosehr, wie wir sehen werden, innerhalb der Untersuchungen, die zur Erweiterung des Zahlbegriffs geführt haben, entstanden, wie im Zusammenhang mit dem Tangenten-Problem. Die Zahl aber wird ja auch heute noch von der Raum-Anschauung unabhängig aus der innern Anschauung ausschliesslich abgeleitet.[1]) Dasjenige Motiv des Differentialbegriffs, welches im Gebiete der Analysis liegt, wird daher hinlänglich dadurch gerechtfertigt, dass das Element der innern Anschauung für das Differential geltend gemacht werden kann. Dem Gattungsbegriffe nach könnte damit das Infinitesimale in der Anschauung geborgen zu sein scheinen.

27. Das mechanische Motiv des Differentialbegriffs. — Indessen ist der Inhalt fundamentaler Voraussetzung, dem der Differentialbegriff entspricht, durch dieses Zeit-Motiv, welches etwa die Zahlenbedeutung desselben an seinem Theile zu decken vermöchte, keineswegs erschöpft. Vielmehr ist für die Entdeckung des Differentialbegriffs ein anderes Motiv ausschlaggebend, welches die nicht infinitesimale Auffassung der Zahlgrösse, bei aller ihrer fortdauernden Bedeutung für das Infinitesimale selbst, dennoch als einseitig kennzeichnet und als unzulänglich für die definitive Lösung derjenigen Probleme, zu welcher sie wie für den Anfang so für allen Fortgang die unersetzliche Hülfe leistet. Es ist ein neues, dem Begriffe der discreten Zahl fremdes Princip, ein neues gedankliches Postulat, welches in letzter Instanz bei Leibniz wie bei Newton die Entdeckung gezeitigt hat, die seit mehr als hundert Jahren vorbereitet war. Und gerade dieses neue Motiv macht es erklärlich, dass weder die Geometer noch die Analysten, was sie in Händen hatten, zu gestalten vermochten; dass dagegen Leibniz und Newton in der Definition dieses Begriffs sich mit Galilei und Kepler begegnen, deren Genius jenem andern Motive gewidmet war.

Suchen wir diesem neuen Motive nachzugehen, so führt uns der Ursprung der Zahl auf dasselbe. Die empiristische Erklärung von der Entstehung der Zahl ist weder

[1]) R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis I. S. 1.

selbstverständlich, noch ernstlich zureichend. Für den Beitrag, den der Zahlbegriff zum Erkennen leistet, muss man nach einer tiefern Begründung ausspähen, als welche in der Auskunft liegt: Dinge sind gegeben, wollen unterschieden sein müssen also — gezählt werden. Nicht einmal psychologisch kann diese Vorstellungsweise die Frage aufklären; denn wenn Dinge in Mehrheit gegeben sind, so fehlt noch viel, dass sie einem zählenden Geiste gegeben seien. Diesen Geist können wir jedoch nur in seiner That erkennen, also in der Zahl. In dieser aber ist er präcis zu erfassen. Mithin kann man den Ursprung der Zahl nicht in den sogenannten Dingen suchen, sondern in der Einheit des Bewusstseins. Schon der erste Schritt jener angeblichen genetischen Erklärung war unbefugt: Dinge sind nicht schlechthin gegeben, sondern im Bewusstsein (25), in diesem aber nur in den eingeschränkten Modificationen von Raum und Zeit. Durch welche Elemente des Bewusstseins werden nun diese so und nur so gegebenen Dinge dergestalt weiter ausgebaut, dass sie zu Objecten auswachsen, wie wir solche in der Naturwissenschaft annehmen, und auf welche eigentlich und ursprünglich die Zahl sich erstreckt? Dieser Ausbau der Objectivirung bedarf anderer Mittel als der Zahl-Benennungen.

In Raum und Zeit allein sind die sogenannten Dinge günstigsten Falls nur als mathematische Körper gegeben. Die Zahl, die diese zählt, würde daher zwar ein solchen Idealgestalten gewachsener Massstab sein; aber sowie jene mathematischen Gestalten nicht als physische Objecte gegeben wären, so würde die Zahl nur eine fictive wissenschaftliche Grösse sein, correlativ jenen idealen Dingen, die als Grössen der reinen Anschauung gemessen werden. Indessen soll vermittelst der reinen Anschauung mehr geleistet, sollen die geometrischen Körper physische werden. Diese fernere Bedeutung vermag die antike Zahl nicht zu gewährleisten. So tritt an die Zahl selbst die Nöthigung heran, durch ein neues Princip sich schärfer ausrüsten zu lassen, wenn anders sie dieser gesteigerten Bedeutung der Dinge, auf die sie doch ihrem ganzen Gebrauche nach gemünzt ist, soll gerecht werden können. Die Wissenschaft, welche sich mit der letzten Instruction für diese materielle Bedeutung der Dinge beschäftigt, welche die geometrischen Körper zu physischen ausrechnet, die Mechanik wurde in jener Zeit neu begründet; und aus dem Quell und

Princip der mechanischen Probleme ist im letzten Grunde der Differentialbegriff entsprungen. Um die Dinge als physische Körper, als reale Gegenstände zu bestätigen, dazu bedurfte es infinitesimaler Zählung. In dieser dritten Bedeutung entspricht das Differential einem Grundbegriffe des reinen Denkens, der Kategorie der Realität. Und auch dieses abschliessende Motiv wird von den Entdeckern deutlich geltend gemacht.

28. Uebergang zur selbständigen Bedeutung der Realität. — Wenn man jetzt von Neuem das Ansinnen stellte, dass auch in dieser Realitäts-Bedeutung das Differential in die Anschauung eingehen müsse, so ist das nicht mehr blos Verwechselung von Erkenntnissmittel und Erkenntnissobject, sondern hier steigert sich der Irrthum ins Absurde. Denn wozu bedürfte man eines Denk-Mittels der Realität, wenn die Anschauung zulänglich wäre, Realität zu liefern und zu sichern. Es gilt nunmehr, den besonderen Geltungswerth auszuzeichnen, der der Kategorie der Realität und damit dem Grundsatze beiwohnt. Nicht allein die Sicherung dessen, was man unter Realität der Dinge versteht, liegt einer besonderen Denk-Bestimmung ob; sondern dargereicht selbst muss die Forderung der Realität in einer besonderen Leistung des Denkens werden. Wenn es zu irgend einem Grundwerthe der Erkenntniss einer besonderen Veranstaltung bedarf, so zu diesem.

Es ist verwunderlich, wie diese Frage, deren Erledigung doch bei dem Stande der mathematischen Naturwissenschaft unserer Tage eine leichte und unzweifelhafte sein müsste, dennoch sachlich wie historisch im Unklaren liegt. Die Objectivität der Dinge beruht in erster Instanz auf ihrer geometrischen Idealität und Idealisirbarkeit. Wenn es keine Kegelschnitte gäbe, so wären die Kepler'schen Planetenbahnen nicht einzurichten, und die Planeten selbst aus und in denselben nicht zu objectiviren. So bildet die reine, die mathematische Anschauung das Fundament alles Naturerkennens. Diese Trivialität bedeutet die transscendentale Aesthetik.

29. Descartes' Substanz der Ausdehnung. — Indessen besitzen wir diese erkenntnisskritische Wahrheit nur was die systematische Begründung betrifft erst seit Kant. Denn die ganze neuere Philosophie bleibt ein versiegeltes Buch von Redensarten, wenn man diesen rothen Faden nicht auch in

seinen blasseren Phasen zu erkennen vermag. Descartes ist nicht dadurch etwa der Begründer der neueren Philosophie, dass er allein diesen Gedanken hätte, sondern dadurch, dass er denselben schärfer und gewaltiger bearbeitet, als Gassendi und Hobbes. Die Bewältigung durch diesen modernen Gedanken, die er selbst erleidet, zeigt sich in der Vergewaltigung, die er an demselben begeht: die erstere erklärt somit auch die letztere. Es ist daher nicht nur unhistorisch, wenn man, wie Dühring dies thut, Descartes' fundamentale Leistung für die Erkenntnisskritik geringschätzig beurtheilt; es ist zugleich systematische Unklarheit, die sich in solchem Urtheil verräth, wie sie folgerecht auch Kant gegenüber zum Ausdruck kommt — und im eigenen Systeme. Descartes' Substanzialisirung der Ausdehnung begreifen wir historisch und würdigen wir sachlich als den Keim des Kantischen Grundgedankens: Begriffe ohne Anschauung sind leer. Was Gegenstand der Erfahrung werden soll, muss zu allernächst den Idealgebilden der Geometrie entsprechen, in denselben darstellbar sein.

Aber darum bleiben wir in dem cartesischen Taumel nicht befangen, in seinem Schwanken zwischen dem Zubehör der Empfindung und den reinen Momenten des Denkens. Trotz aller Ansätze und Dispositionen, deren urkundliche Untersuchung und projicirende Interpretation eine so reizende und lohnende Aufgabe der historisch sich orientirenden erkenntnisskritischen Arbeit ist, ist Descartes' Bestimmung der Substanzen, auch der des Denkens, durchaus unzulänglich und zweideutig geblieben. Von aller mangelnden Sicherheit in der Stellung des Problems abgesehen, bildet schon die Gleichsetzung von Ausdehnung und Materie ein schwerverbesserliches Hemmniss, selbst wenn hinterher durch das Denken der Begriff der Materie gründlicher bestimmt wird. Für diesen Fortgang in der Constituirung gedanklicher Voraussetzungen zur Begründung des Naturerkennens bedarf es der den Kraftbegriff constituirenden Bedingungen. Unter diesen aber sind die Begriffe der Substanz und der Causalität die allgemein zugestandenen; aber nicht schlechthin als Begriffe, sondern auf die Anschauung bezogen und beschränkt. Und diese Einschränkung fehlt bei Descartes, während die Beziehung durchsichtig angestrebt wird.

30. Die Abstraction der Kategorie und der Grundsatz. — Es kommt also darauf an, dass der Begriff als

Denk-Mittel isolirt werde, um desto lebendiger mit den Mitteln der Anschauung vereinbart werden zu können. Und dazu bedarf es der Kategorie der Realität. Schon bei der Substanz zeigt sich dieses Verlangen und der lallende Ausdruck derselben bei Locke, wie er das Fundament der Substanz mit dem τρίτος ἄνθρωπος von der Schildkröte und dem Elephanten verspottet. Ganz besonders aber tritt dieser Mangel an der Causalität zu Tage, sei es indem man sie a priori annimmt, nicht aber einen ihr entsprechenden Raum, sei es indem man sie direct und unverhüllt mit sinnlichem Dasein ausstattet, als Einzel- oder Gesammtexistenz eines Kraft-Apparates aufrichtet oder fragwürdig hinstellt. Will man den Aberglauben des Influxus physicus mit der Wurzel ausrotten, so muss man die Nothwendigkeit einsehen, zunächst das Denk-Element als solches zu isoliren, seine besondere Leistung für das Erkennen auszuzeichnen, um es nicht vorzeitig durch die erforderliche Rücksicht auf die Anschauung trüben und verschränken zu lassen. Darauf erst kann der Rücksicht auf die Anschauung das Wort verstattet und zu fruchtbarer Verständigung gegeben werden: zum Behufe der Grundsätze, in denen Anschauung und Denken sich verbinden.

Vielleicht ist nun gerade an der mangelhaften Durchdringung von der Bedeutung der Grundsätze der Umstand schuld, dass man die dynamischen Kategorien lediglich mit dem extensiven Grössenbegriffe zu vereinbaren bestrebt war, und nicht bemerkte, dass bei alledem noch immer Ein wichtiger Stein fehle. Wenn Substanz und Causalität als Grundsätze gedacht werden, so kann es nicht genügen, sie mit den extensiven Zahlgrössen in Verbindung zu setzen, weil (27) diese das Ideale der Zahlen an sich tragen. Daher blieb man bei der Vorstellung einer compacten Solidität in der Substanz selber stehen, anstatt diesem Postulate durch die Auszeichnung eines besonderen Begriffs zu genügen. Dieses Desiderat soll die Kategorie und nach ihrer Vereinbarung mit der Anschauung der Grundsatz der Realität befriedigen.

31. Verhältniss von Substanz und Causalität zur Realität. — In der That setzen Substanz und Causalität die Realität voraus. Denn Substanz und Causalität sind Verhältnissbegriffe. Zu einem B ist A die Substanz, zwischen C und D giebt es Causalität. Wenn B und A, C und D gedacht werden,

so können zwischen ihnen diese beiden Verhältnisse obwalten, zu denen noch ein drittes hinzutreten kann. Dass dagegen B und A, oder B oder A gegeben seien, oder gedacht werden müssen, das liegt keineswegs in dem Grundsatz der Analogien. Diese wichtigen Grundlagen schweben also sämmtlich in der Luft, auch wenn man sie mit Raum und Zeit verbindet; denn alsdann bleiben sie immer nur in der Schwebe mathematischer Gestalten. Auch genügt es nicht etwa, sie mit der extensiven Zahlgrösse zu erfüllen; denn auch diese vermag nur Strecken abzugrenzen, die in der wechselnden Vergleichung hangen. Und doch hält man jene in der Verbindung mit der Anschauung haltlosen Grundsätze für die Stützen des Naturerkennens, für zureichend, um geometrische und Zahlen-Gebilde zu physischen Körpern zu erfüllen. Vielmehr bedarf es der ausdrücklichen und selbständigen Setzung des A und des B, um ein Verhältniss unter ihnen gliedern zu können. Und diese Setzung muss in einem besondern Grundsatze geführt werden. Dieses Fundament liefert der Grundsatz der Realität.

Wie konnte man ernstlich glauben, dass die logische Thatsache des bejahenden Urtheils für Kant hätte die Veranlassung bieten können, die Realität zur synthetischen Einheit desselben zu machen, neben welcher die Negation als coordinirter Grundbegriff figurirt — während auf diese logische Trivialität der Grundsatz der Anticipationen gepfropft wird, durch den die Wahrnehmungen garantirt werden! Hätte nicht dieser Grundsatz mit dem Schwergewicht des Realen, das er herbeibringt, jene Realität aus der logischen Bejahung in eine positivere Situation versetzen sollen?

Indessen wurde diese Einsicht wiederum gehemmt durch die äusserliche, gar nicht mehr logische, sondern schlechtweg grammatische Bedeutung, die man der Limitation einräumte, und darum den innersten Zusammenhang derselben mit der Realität nicht einsah. Es ist, wie wir nunmehr von der andern Seite bemerken, der Mangel einer erkenntnisskritischen Begründung des Differentialbegriffs zugleich der Grund für die Lücke, die der Grundbegriff der Realität in der Reihe der Kategorien bildet. Er scheint im synthetischen und die Erfahrung begründenden Sinne überflüssig zu sein, weil entweder durch Substanz und Causalität, oder durch die Kategorie des

Daseins ersetzt; daher belässt man ihn lediglich für die logische Function des Jasagens in Wirksamkeit.

32. Realität und Dasein. — Versuchen wir endlich, die selbständige Leistung der Realität gegenüber dem Postulate der Modalität zu vergegenwärtigen. Der Grundsatz des Daseins bezieht sich auf den Erkenntnisswerth, welcher den Thatsachen der Wahrnehmung beiwohnt, und begründet dieselben in ihrem Sonderwerthe, nach ihrem Verhältniss zu den Hypothesen der wissenschaftlichen Erklärung wie zu den Folgerungen und Schlüssen des Beweis-Verfahrens. Aber von jenen Thatsachen der Wahrnehmung wird ebensosehr wie von den Analogien A und B vorausgesetzt. Wenn A und B gesetzt sind, so nenne ich dasjenige Verhältniss unter ihnen Thatsache, welches für den Zusammenhang von A und B auf Wahrnehmung beruht. Wahrnehmung selbst aber bezeichnet ein methodisches Mittel der Erfahrung, ähnlich wie das Kreisbeschreiben für die Geometrie. Es ist eine Uebereinkunft, das Wahrnehmbare als das Wirkliche zu benennen, das Bewiesene dagegen als das Nothwendige. Wer in der Wahrnehmung das natürliche Recht, die unmittelbare Gewissheit, die absolute Quelle der Wirklichkeit erblickt, der steht noch ausserhalb der erkenntnisskritischen Belehrung. Wenn Wahrnehmung das zureichende Kriterium der Objectivität enthielte, so würde es aller weiteren kritischen Zurüstung nicht bedürfen: wir wüssten alsdann, wo wir sie fassen könnten, die unendliche Natur. Vielmehr bezeichnet die Wahrnehmung und die ihr entsprechende Wirklichkeit eben nur jenes durch Dasein definirte Verhältniss unter den gedachten Elementen der Gleichung; das Dasein selbst ist der Grundbegriff, das Postulat der Wirklichkeit, welches in der Aufstellung und Auszeichnung dieses besondern Grundsatzes und dazu eines besondern Denk-Mittels befriedigt wird.

Aber auch dieser Grundsatz setzt die Realität voraus, die Auszeichnung eines Denkmittels wie eines Grundsatzes für diese Voraussetzung ist daher unumgänglich. Man kann sagen, der Grundsatz der Anticipationen der Wahrnehmung enthalte das Problem der Erkenntnisskritik zusammengefasst. Denn um die Wahrnehmung zu legitimiren, wird die Empfindung zunächst reducirt auf die reine Anschauung. Da aber damit der Zauber der Imagination und der idealen Phantasie

nicht beschworen wird, so wird die Ergänzung der Realität durch eine solche Bedeutung derselben nothwendig, welche den Knoten der Anschauung durchhaut: alle Extension überwindet, die doch nun einmal mit jener mangelhaften Idealität behaftet ist und bleibt. Dieses Uebertreffen leistet die Realität, indem sie neben dem Grundsatze der extensiven Grösse einen solchen der intensiven möglich macht.

33. Intensive Realität. — Ein solcher besonderer Grundsatz ist erforderlich, um die Empfindung, die Wurzel des Subjectiven zu apriorisiren und zu objectiviren. Und dieser Grundsatz muss die Extension überwinden; denn er soll legitimiren, dass A und B an sich gesetzt werden dürfen. Die Extension hingegen bestimmt nur Massgrössen, die als solche auf Vergleichungen basiren. Dennoch aber behält die Realität Zusammenhang mit der Gegebenheit, mit der Bezogenheit des Bewusstseins auf Gegebenes (25). Vielmehr will die Realität das Schwebende an dieser sicher machen und erfüllen, den geometrischen Körper zum physischen ausgestalten. Dadurch erst erlangt das Gegebene jene anscheinende Solidität und Selbstverständlichkeit, die es innerhalb der Anschauung keineswegs besitzt. Denn auch das Idealgebild der innern Anschauung ist eine schraffirte Linie, ein loses oder festes Nacheinander: in welchem jedoch das Element selbst, welches voraufgeht, welches folgt, illegitim bleibt. Dass ich ein Element selbst an und für sich setzen darf, das ist das Desiderat, welchem das Denkmittel der Realität entspricht. Dieses Denkmittel muss zuerst aufgestellt sein, um jene Verbindung mit der Anschauung, mit dem Bewusstsein der Gegebenheit eingehen zu können, die in dem Grundsatz der intensiven Grösse vollzogen wird.

Diese Voraussetzung der intensiven Realität ist in allen Grundsätzen latent, sie muss daher selbständig gemacht werden. Diese Voraussetzung ist der Sinn der Realität und das Geheimniss des Differentialbegriffs; das logische Geheimniss, das die Erkenntnisskritik enthüllt. Und die allgemeine Bedeutung dieser Enthüllung besteht in der Aufklärung über das Verhältniss von Anschauung und Denken. Einmal nämlich wird gelehrt die Einschränkung des an seinem Theile unentbehrlichen Erkenntnissmittels der Anschauung; andererseits aber wird der positive Nachweis geliefert: dass das Denk-

mittel der Realität da einzutreten vermag, wo die Anschauung allein versagt. Endlich wird eindringlich gemacht, dass das Denkmittel nichts destoweniger der Verbindung mit der Anschauung sich nicht entziehen darf; denn die Realität bezweckt nichts unmittelbarer als die Realisirung der Gegebenheit. Damit aber kommen wir zu dem Ausdruck, welcher das Verhältniss der Realität zu der Anschauung als Qualität kennzeichnet.

34. Dreifache Vermittelung des Infinitesimalbegriffs. — Die intensive Realität ist als Qualität von der Quantität zu unterscheiden. Sie ist ein eigener Grundsatz, dem es zu verdanken ist, dass die Methoden der Mathematik in gegenseitige Beziehungen treten können. Denn alle Anschauung ist auf eine Mehrheit von Elementen angewiesen und besteht in der Ordnung und Gestaltung derselben. Indessen die Wissenschaft von der Anschauung kann mit diesem Verhältnisse unter einer solchermassen gegebenen Mehrheit von Elementen nicht auskommen: sie bedarf der Voraussetzung einer Einheit, und zwar einer solchen, welche nicht in dem Zusammensturz der Mehrheit besteht, sondern welche vielmehr ihrerseits die Mehrheit entstehen lässt, mithin einer qualitativen Einheit. Das ist die intensive Realität. Sie bedarf dieser neuen Voraussetzung in dreifacher Beziehung: 1. für die Geometrie; 2. für die Zahlenlehre; 3. für die Mechanik. Und diese drei Beziehungen haben in der Mechanik zusammengewirkt, um die Entdeckung des Differentials zu zeitigen.

35. Anfänge des Unendlichkleinen. — Für den Ursprung der Infinitesimal-Rechnung ist von jeher auf die Alexandriner hingewiesen worden, insbesondere auf Archimedes. Man darf jedoch darüber nicht vergessen, dass sich bei Platon, dem Entdecker der analytischen Methode, entschiedene Aeusserungen im Sinne der idealistischen, auf Mathematik die Natur gründenden Weltansicht finden. Seine Ansicht von der Physik und Astronomie, dass sie Beispiele für die reine Mathematik seien, beruht auf jener Einsicht von der instrumentalen Bedeutung der Mathematik für die Physik. Und dieser Einsicht entspricht seine Bestimmung des Verhältnisses der *μαθηματικά* einerseits zu den Ideen und andererseits zu den Dingen. Auch seine Lehre von dem Raume (*χώρα*) als dem Fundament der Materie geht in dieser Richtung. Zu-

gleich aber bildet in dem Terminus der Idee die Anschauung mit der durch sie gegebenen Collision von Schauen und Denken den typischen Anstoss[1]).

Bei Archimedes, wie schon bei Euklid werden die Verlegenheiten bezüglich des Universalmittels der Anschauung an den Special-Problemen fühlbar, und so führen diese zu den Anfängen des Unendlichkleinen. Bei der Verdoppelung der Seitenzahl der Polygone, um die Kreisperipherie zu erreichen, lässt die Anschauung im Stiche. Um nun hier den Mangel der Evidenz zu ersetzen, kam Archimedes bei seinen geometrischen und mechanischen Methoden zur Quadratur der Parabel auf den Hilfsbegriff der Grenze. Das Verhältniss zwischen einer krummlinig begrenzten Ebene und dem darin beschriebenen Polygon wurde dadurch bestimmbar, sofern anstatt der Anschauung der Satz zu Grunde gelegt wurde: „dass die Summe aller übrig bleibenden Abschnitte kleiner werde als jeder angebbare Flächenraum".[2]) Bei Archimedes wurde diese von Euklides gemachte Voraussetzung durch vorbereitende Sätze und indirecten Beweis der geometrischen Evidenz angenähert. Im Mittelalter jedoch, und auch als man im 16. Jahrhundert anfing, sich mit Archimedes zu beschäftigen, entstand aus diesem Euklidischen Hilfssatze der vage Begriff des Unendlichkleinen[3]), und für die Operation mit demselben die Meinung von einer Archimedischen Exhaustions-Methode[4]).

Dieser „Methode" fehlte jedoch nichts Geringeres als die Allgemeinheit. Und zudem war ein Unendlichkleines, dessen Werth hauptsächlich darin besteht, dass es vernachlässigt werden könne, zu grösserer Fruchtbarkeit unvermögend; der Grenze mangelte alle schöpferische Positivität.

36. Grenze und Untheilbares. — Dieser defecte Sinn des Unendlichkleinen, in dem ausschliesslich negativen Begriffe der Grenze, bestimmt auch die meisten der

---

[1]) H. Cohen, Platons Ideenlehre und die Mathematik 1878.

[2]) Gerhardt, Die Entdeckung der höhern Analysis 1855. S. 6—9.

[3]) Es wäre der Vorwurf einer wichtigen und anziehenden Untersuchung, nachzuweisen, wie das theologische Interesse am Unendlichen mit diesem Grundbegriff der wissenschaftlichen Renaissance sich verbündet, um wie bei Nicolaus von Cues und Giordano Bruno die Discussion des Infinitesimalen zu fördern.

[4]) Gerhardt, Die Entdeckung der höhern Analysis S. 14.

mächtigeren Versuche, dieses Problem zu bewältigen, welche das 17. Jahrhundert anstrengt. Soweit Cavalleri's Methodus Indivisibilium aus den Berichten und Auszügen, welche ältere historische Einleitungen zu dem Cursus der Infinitesimal-Rechnung enthalten, mir verständlich wird, scheint auch ihr Mangel in dieser lediglich negativen Bedeutung der Grenze zu liegen, welche die Ausmessung continuirlicher Gebilde verhindert. Cavalleri's Indivisibilia gelten seinem Nachfolger Roberval als heterogenea im Verhältniss zu den Linien, Flächen und Körpern, zu deren Ausmessung sie angenommen werden. Dieser Hilfsbegriff des Untheilbaren, den Cavalleri nirgend genauer bestimmen soll, obzwar er als praecipuum instrumentum von ihm bezeichnet wird, zeigt seine ganze Haltlosigkeit gegenüber der Hauptfrage: ob die Flächen und Körper nur aus Indivisibilibus bestehen, oder ob zwischen denselben noch aliquid aliud in dem Continuum enthalten sei. Diese Frage wird nicht bestimmt beantwortet. Und darin zeigt sich die enge, auf ein rein geometrisches Bedürfniss bezogene Bedeutung dieses neuen Verfahrens, welches daher nur sehr eingeschränkter Weise als Vorspiel des Infinitesimalen bezeichnet werden darf. Durch so unbestimmte Fassung eines letzten Discreten ist das Continuum nicht zu erschöpfen. Es mussten continuirliche Discretionen ausfindig gemacht werden, um das Continuum auszumessen.

37. Grenze und Ursprung. — Es gilt demgemäss zwei Bedingungen zu erfüllen. Erstlich ist das Discrete nicht zu umgehen; aber es muss bestimmt, von aller Willkür und allem gedanklichen Schwanken befreit werden. Diese feste Bestimmung des Discreten ist ferner nur möglich durch die Rücksicht auf das Continuum, dessen Discretheit es werden soll. Daher ist der Begriff der Grenze von seiner ausschliesslichen Beziehung auf das Discrete zu befreien, so dass er von dem Begriffe der Continuität aufgenommen werden und in den Dienst derselben treten kann. Ursprünglich war die Grenze zum Ersatz der fehlenden Anschauungs-Evidenz erdacht, um Ungleichheiten einer obzwar unanschaubaren, so doch giltigen Gleichheit anzunähern.

Es handelt sich also bei der Grenze um nichts Geringeres, als um Elision der extensiven Grössen-Gleichheit. Ein solches Unterfangen wird gewagt, um das Gebiet der wissen-

schaftlichen Anschauung der gemeinen zum Trotze, zu erweitern. Diesen Zweck vermag die negative Grenze nicht zu vollführen: hierzu bedarf es positiver, das Hemmniss der Anschauung principiell überbietender Mittel; bedarf es eines Princips, welches als solches die Anschauung in ihrer bisherigen Bedeutung entsetzt. Ein solches Fundament, einen solchen Quell selbständiger Gesetzlichkeit, ein solches Princip schöpferischer Continuität enthält der negative Grenzbegriff nicht; enthält somit auch dasjenige Unendlichkleine und Untheilbare nicht, welches auf jenem beruht. Denn alle Grenze bedeutet Reduction des in der Anschauung gegebenen Ungleichen auf Gleichheit, wobei der Sprung unvermeidlich ist. Soll ein Continuum als solches bestimmt, soll der durchgängige Zusammenhang der Gebilde hergestellt werden, so muss die Maasseinheit eine constructive, nicht eine reductive sein. Die continuirliche Einheit muss als Ursprung gedacht werden. Das Unendliche muss dem Endlichen entrückt werden, um aus sich das Endliche erzeugen zu können.

38. Das Motiv der Bewegung. — In diesem Sinne scheint Kepler, der vor Cavalleri das Unendliche als Instrument zur Ausmessung angewandt hat, mit seiner genialen Phantasie den bewegenden Punkt getroffen zu haben, und Cavalleri selbst, indem er die Selbständigkeit seiner Erfindung vertheidigt, formulirt den Vorzug des Kepler'schen Gedankens: Kepler setze aus seinen corporibus minutissimis die grösseren zusammen, und brauche sie als zusammenwirkende Elemente (concurrentibus), während er selbst Linien und Ebenen nur als „Aggregate", und zwar nicht als coincidentia, sondern nur als aequidistantia betrachtet.[1]) Kepler dagegen betrachtet den Umfang des Kreises aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt, von denen jeder die Basis eines Dreiecks bildet, deren Spitzen im Mittelpunkt zusammentreffen; ebenso die Kugel aus unendlich vielen Kegeln. Zur Inhaltsbestimmung der Fässer, welche ihn zu dieser Aufgabe führte, untersuchte er die Verhältnisse 87 neuer Körper, die er durch Bewegung sphärischer und konischer Flächen entstehen liess.

---

[1]) Christoph. Frid. Pfleiderer, Kepleri Methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata, Tubingae 1795. p. 26, 30.

So verbinden sich bei Kepler die instrumentalen Begriffe des Unendlichkleinen und der Bewegung, die dem Begriffe der Grenze ihrerseits eine positive Bedeutung verschaffen. Und diese positive Bedeutung, dieses für die geometrische Bestimmung fruchtbare Motiv des Unendlichkleinen als eines Princips der Bewegung, und zwar der begrenzenden Bewegung, führt zu dem eigentlichen Princip dieser ganzen Betrachtungsweise, dem Princip der Continuität. Zunächst bewährt sich dieses Motiv an der Hauptfrage der Zeit, dem Tangenten-Problem, zu dessen Förderung Kepler selbst den Anstoss gegeben hat.[1])

39. Das Tangenten-Problem. — Cavalleri hatte die Ausmessung krummlinig begrenzter Flächen durch Vergleichung mit geradlinigen unternommen. Der Fortschritt, den das Tangenten-Problem bildet, möchte darin bestehen, dass mit demselben die Aufgabe entstand, die Curve aus ihrem Begriffe zu erzeugen, und mittels des Begriffes der Curve sodann zum Gedanken der Integral-Rechnung vorzudringen. Auf diesem neuen Gebiete arbeiten und begegnen sich Roberval, Descartes und Fermat, welche jedoch hierin sämmtlich den Spuren Kepler's folgen.

Descartes' Methode beschränkt sich nun darauf, die beiden Punkte, in denen die Curve von einem Kreise geschnitten wird, in Einen berührenden Punkt zusammenfallen zu lassen. Und als Fermats Vorzug wird sein Festhalten an der Strenge der Alten gepriesen. Indem er, wie Archimedes, die Tangente zur Subtangente in Beziehung setzt und aus derselben zu bestimmen sucht, bleibt auch er bei dem negativen Begriffe der Grenze stehen, indem er durch die Annäherung der beiden Punkte der Tangente zwei ungleiche Verhältnisse zur Gleichheit oder „Beinahegleichheit" zusammenfallen lässt.[2]) So bildet die Grenze auch hier nur den Terminus ad quem.

Roberval, der um philosophische Fixirung der methodischen Grundbegriffe bemüht war,[3]) scheint auch hier eine positive Wendung zu nehmen, gleichwie er von der Methodus Indivisibilium einen ihm eigenthümlichen Gebrauch macht. Nach Roberval begrenzt sich nicht blos die Linie in Punkten, sondern die Unendlichkeit der Punkte setzt die Linie zusammen.

[1]) Gerhardt, a. a. O. S. 17. — [2]) Gerhardt, a. a. O. S. 41. — [3]) Victor Cousin, fragments de philos. Cartésienne 1845. p. 229—261.

Er bestimmt dahin seinen Unterschied von Cavalleri, dass nach ihm die Linie aus unendlichkleinen Linien bestehe (constet), und aus denselben zusammengesetzt[1]) werde (componi). Dies ist der Kepler'sche Gesichtspunkt, und derselbe waltet auch in Roberval's Tangenten-Methode.. Gemäss derselben bildet die Tangente in der That den Begriff der Curve. Denn Roberval geht, durch Mersenne's Aufgabe der Cycloide angeregt, von dem „Axiom" aus, dass jede Curve durch die Bewegung eines nach zwei oder mehreren Richtungen angetriebenen Punktes beschrieben werden könne, und dass die Richtung des Punktes zugleich die Tangente des Curven-Punktes sei. Mithin ist die Richtung, welche die Bedeutung der Tangente hat, das erzeugende Motiv der Curve. Der Punkt der Tangente und der Punkt der Curve können ferner nicht als zwei Punkte gelten, die zusammenfallen, sondern sie sind Ein Punkt, in Rücksicht auf die Erzeugung der Curve.

In diesem Gedanken beruht der Zusammenhang des Tangenten-Problems mit dem Differentialbegriff. Das Unendlichkleine bethätigt sich in der Tangente als das erzeugende Moment, und somit kommt positive, schöpferische Bedeutung in die Begrenzung. Der Punkt der Tangente, welcher die verschiedenen Bewegungen eines Punktes zu Einer Richtung vereinigt, erzeugt in dieser Richtung die Curve. Die antike Bedeutung der Grenze wird in der Anwendung auf das Tangenten-Problem überwunden. Damit aber ringt sich ein neues Princip hervor, welchem die Rechtfertigung dieses erzeugenden Motivs zufällt. Und dieses neue, von dem negativen Grenz-Princip zu unterscheidende Grundgesetz vermittelt zugleich die Verbindung des geometrischen Motivs des Differentialbegriffs mit dem in der Arithmetik und der analytischen Geometrie gelegenen, besonders aber mit dem mechanischen.

40. Das Princip der Continuität eine Grundgestalt der Einheit des Bewusstseins. — Dieses neue Princip ist das Princip der Continuität. Der Gedanke der Continuität wird schon bei den Eleaten verhandelt, er gehört dem Zusammenhange derjenigen Erwägungen an, welche das Sein aus dem Denken ableiten. Der Gedanke ist daher allgemeiner, als er erscheinen mag, wenn man es für ausreichend hält, den-

---

[1]) Gerhardt, a. a. O. S. 31.

selben auf der Raum-Anschauung zu basiren, damit aber in derselben zu beschränken. Der Gedanke ist umfassender, und es ist nothwendig, diese seine allgemeine Natur zu erkennen, weil in derselben die eigentliche Legitimations-Instanz für Fragen gelegen ist, welche ohne die Anerkennung der letztern dunkel und unlösbar scheinen. Die Continuität bezeichnet einen allgemeinen Charakter des Bewusstseins, ähnlich wie die Identität. Sie ist daher ein Special-Ausdruck des allgemeinen Gesetzes der Einheit des Bewusstseins.

41. Die Continuität und das limitirende Urtheil. — Der Continuität des Bewusstseins ist es zu verdanken, dass wir Gattungsbegriffe bilden können, welche negativ zu sein scheinen, welche jedoch ebenso fruchtbar und nothwendig für die wissenschaftliche Erkenntniss sind wie die positiven. Die Continuität leitet das limitirende Urtheil. Es ist bedauerlich, dass Lotze in der Würdigung des limitativen Urtheils Hegels Scherze nachgeahmt hat. Freilich hat das Urtheil: „der Verstand ist kein Tisch" keinen anständigen Werth. Ebensowenig das Urtheil vom „Nicht-Menschen", wenn darunter „Dreieck, Wehmuth und Schwefelsäure" verstanden wird. Aber wenn man solchermassen Unvergleichbares zusammenwürfelt, so demonstrirt man nur am eigenen Beispiel, wie höchst nöthig das Verständniss dieser Urtheils-Art sei und wie empfindlich sich der Mangel desselben räche. Das Denken ist eben jenen tollen Einfällen nicht preisgegeben; das Denken vermag aber auch vom Verstande nicht blos bejahend auszusagen, dass er etwa ein psychologischer Gattungsbegriff sei; und nicht nur auch negativ, dass er nicht eine Nerven-Ausschwitzung sei; sondern ebensosehr, dass er demjenigen Zusammenhang seelischer Modificationen angehöre, welcher etwa durch den Spielraum der Kunst und des moralisch Erlaubten limitirt ist; wie wenn ich sage: die Logik ist unerbittlich. So kann es einen guten Sinn haben, zu behaupten: der Verstand ist unschön und unbillig. Derartige Determinationen sind nicht willkürlich und als „offenbare Grillen" entstanden, sondern aus Bedürfnissen des wissenschaftlichen Denkens, um da wenigstens Begrenzungen zu vollziehen, wo vollständige Definitionen vorerst versagt waren. Es ist von Vortheil, wenigstens den unendlichen Gattungsbegriff zu bestimmen, wo das positive genus proximum noch nicht erreichbar ist. Der eine Begriff des $\mu\dot{\eta}$ $\ddot{o}\nu$ müsste

zur Vorsicht in der Erörterung dieser Frage gemahnen.

Zu solcher Limitation aber ist die Sicherheit erforderlich, dass das Denken unvermittelten Sprüngen im Gebiete des Denkbaren nicht preisgegeben sei; sondern dass es getrost auf ein X ausgehen dürfe, durch dessen Begrenzung nicht etwa eine alberne, gegenstandlose Verneinung begangen, sondern eine Position behauptet und für dasjenige Element geltend gemacht wird, von welchem das Denken ausgehen muss. Was ist Geist? Soll ich, sofern ich den Geltungswerth dieses Begriffes nicht materialistisch negiren will, darauf beschränkt sein, positiv bestimmen zu müssen, und zwar von vornherein, welche Art von Sein dieser Begriff darstelle? Vielmehr wird es geboten und förderlich scheinen, zunächst im Allgemeinen eine Vergleichung mit demjenigen Begriffe anzustellen, welcher sein Gegentheil bezeichnet. Diese wichtige Stufe in der Urtheilsbildung vertritt das limitirende oder unendliche Urtheil: der Geist ist immateriell; der Geist gehört derjenigen Gruppe von Gedankenbestimmungen an, welche durch Ausscheidung des Materiellen zu charakterisiren sind. Diese unendliche Gruppe ist das tertium comparationis. Das Tertium aber darf nicht ein entlegener Gemeinplatz, sondern muss vielmehr in natürlicher Angrenzung benachbart sein. Der Muth des Denkens, dass für den Geist ein solcher Zusammenhang erreichbar sei, nährt sich aus dieser Quelle der Continuität des Bewusstseins. Und beruht nicht auf jenem unendlichen Urtheil am letzten Ende die Kraft des bejahenden Urtheils vom Geiste?

Es giebt noch ein anderes Beispiel des limitirenden Urtheils, welches für unser Problem von besonderem Bezuge ist. Die Imponderabilien sind bekanntlich nicht lediglich negative Begriffe, insofern sie von dem Gesetze der Schwere ausgenommen werden. Sie sind aber auch nicht schlechthin positive Begriffe, insofern sie dem Gesetze der Trägheit unterworfen werden. Sie bilden eben jene Klasse von unendlichen Begriffen, welche zu dem positiven Begriffe der Materie in einem so intimen Verhältnisse stehen, dass es fraglich werden kann, wo die Abhängigkeit liegt. Die Imponderabilien bilden in dem Aether den Grundstoff der Materie. Wäre demnach dieses limitirende Urtheil nicht gebildet, so gebräche es an der Möglichkeit, den positiven Begriff der Materie selbst aus seinen

wahren Merkmalen zu constituiren. Diese liegen in dem unendlichen Begriffe vorbereitet. Damit aber nähern wir uns für die Illustration des unendlichen Urtheils demjenigen Begriffe, welcher hier den Gegenstand der Untersuchung bildet.

42. Die Continuität und das Infinitesimale. — Das Princip der Continuität bedeutet die Voraussetzung: conscientia non facit saltus. Diese Stütze des Bewusstseins bewährt sich in eminenter Weise an dem Infinitesimalbegriff. Das Unendlichkleine ist das instructivste Beispiel für die Fruchtbarkeit, den Plan und Werth des limitirenden Urtheils. Um das Endliche zu bestimmen, aus den Voraussetzungen und Gesetzlichkeiten, denen es entstammt und zugehört, letztlich zu erzeugen, dazu wird es nothwendig, eine Art wissenschaftlichen Seins zu erdenken, welche zunächst nur durch ihren Unterschied vom Endlichen zu charakterisiren ist. Für die sinnliche Anschauung sind der Punkt der Tangente und der Punkt der Curve zwei Punkte; im Begriffe der Curve sind sie Ein Punkt, ein unendlichkleiner. So hat das Infinitesimale der Richtung den endlichen Curven-Punkt und damit das wissenschaftliche Sein der Curve hervorgebracht. Diese Schöpfung vollbringt ein Grundgesetz des Bewusstseins, welches gilt vor Raum und Zeit, welches daher von den eingeschränkten Rechten auch der reinen Anschauung nicht abhängen kann.

Die Continuität ist also eine allgemeine Grundlage des Bewusstseins: nicht auf Haufen disparater Elemente verwiesen zu sein, sondern im Zusammenhange vergleichbarer Glieder zu wurzeln. Somit wird die Continuität nicht erst als Stetigkeit in der unendlichen Theilbarkeit des Raumes wirksam, sie gehört überhaupt nicht in erster Linie der Raum-Anschauung an; sondern sie bildet eine fundamentale Bestimmung des Denkens, eine Grundgestalt desjenigen Bewusstseins, welches als Bewusstsein des Denkens von dem Bewusstsein der Anschauung oder dem Bewusstsein der Sinnlichkeit so zu unterscheiden ist, wie man Logik von Erkenntnisslehre zu unterscheiden allgemeiner geneigt ist. Die Continuität ist demgemäss auch ganz besonders in demjenigen mathematischen Gebiete fruchtbar, welches dem allgemeinen Denken am nächsten liegt, als der allgemeine Theil der Mathematik daher vielfach bezeichnet worden ist, der Zahlenlehre.

43. Die Continuität und die Zahl. — Durch Zählen scheinen die Dinge zunächst zwar am allgemeinsten vergleichbar zu werden. Von ihren Eigenthümlichkeiten wird abgesehen, und lediglich dass sie Einheiten sind, wird beachtet. Dadurch erscheinen die Zahlen als die ersten Mittel und Objecte der Abstraction überhaupt. Indessen ist diese Abstraction doch mit einer schweren sinnlichen Ungenauigkeit behaftet, die tiefere Abstractionen nöthig macht. Alle Abstraction erstrebt Gemeinsamkeiten, Gattungen, Arten, nicht Individuen festzustellen. Das Individuum gilt der Abstraction vielmehr als solches der Gattung. Auch wenn man die Determination der Abstraction zurechnet, so will doch auch sie nur Gedankenbestimmungen treffen, vermöge deren das relative Individuum in anderer Relation einer Gattung angehört. Alles abstracte Denk-Verfahren geht auf die Herstellung geistiger Genossenschaften aus. Das Zählen hingegen setzt und befestigt discrete Einheiten. Und nur soweit vermag das Zählen abstractiv zu sein, als diese Discretionen gedanklicher Art sind, und begriffliche Verbindungen erzeugen, den Begriff der Zahl entfalten.

In der That liegt in der Zahl, sofern sie das Princip der Discretion zu sein scheint, zugleich die Ueberwindung derselben. Die Alten haben den Bruch noch von dem Begriff der Zahl ausgeschlossen. Und doch unterbricht bereits bei ihnen die Irrationalzahl thatsächlich die Bestimmtheit der endlichen Discretion, führte sie daher auch zu ihrem Surrogat für die anschaubare Endlichkeit, dem Begriffe der Grenze. In dem Begriffe der Irrationalzahl liegt somit die Aufforderung zum Verlassen der Discretion. Denn sie stellt die Aufgabe, dasjenige, was rationale Brüche nicht darzustellen vermögen, in einer nicht abzubrechenden Reihe zu vollziehen. Diese Reihe schliesst daher die Discretion aus; und will doch keineswegs der Bestimmtheit verlustig gehen, vielmehr eine Bestimmtheit herstellen, welcher die discrete rationale Zahl nicht gewachsen ist. In der Irrationalzahl ist bereits das Princip der Continuität der treibende Gedanke, und der legitimirende.

Woher anders käme das Ansinnen, „eine unbeschränkt fortzusetzende Reihe zu bilden“, und zudem die Sicherheit, „eine gewisse Forderung, welche durch einen rationalen Bruch nicht

in aller Strenge erfüllt werden kann, mit beliebiger Genauigkeit erfüllen“ [1]) zu können? Die Reihe beruht auf dem Princip der Continuität, das auch für die Reihe selbst nicht erst auf geometrischem Boden erwachsen ist, sondern seine allgemein logische Anlage an der Specialität des Zahlbegriffs rein ausgebildet hat. Denn die Zahl hat freilich nicht in ihrem empirischen Anfangsgebrauche die Continuität zum Ausdruck gebracht; aber sie ist dennoch nach ihrem wissenschaftlichen Charakter schon bei den Pythagoreern mit der Continuität in Zusammenhang gedacht worden. Mit dem Ergebniss der unendlichen Reihen tritt das Princip endlich unverhüllt hervor.

44. Die qualitative Einheit der limitativen Realität. — Die Continuität fordert sonach den Begriff einer Einheit, in welchem die Unendlichkeit eingeschlossen ist. Und diese Forderung hat bereits Galilei in epigrammatischer Schärfe ausgesprochen: „Si aliquis numerus possit infinitus dici, hunc esse Unitatem ... concludimus itaque, praeter unitatem nullum alium esse numerum infinitum. Et haec sunt ex istis mirabilibus, quae imaginationis nostrae superant capacitatem, quaeque nos admonere debent, quam gravem incurrat errorem, si quis de infinitis volens ratiocinari, adhibeat eadem attributa, quibus nos circa finita utimur, quorum naturae nullo inter se conveniunt modo“. [2])

Wenn aber die Einheit kraft der Continuität des Bewusstseins die Unendlichkeit in sich hat, so ändert und vertieft sich dadurch der Begriff der Einheit überhaupt, und demgemäss das Verhältniss des Unendlichen zum Endlichen. So lange man noch inductiv von dem Endlichen zu dem Unendlichen überzugehen sucht, solange bestehen jene „Wunder“, die sich jedoch aufklären, sobald man umgekehrt mit dem Unendlichen am Endlichen deductiv zu verfahren gelernt hat. Alsdann wird es klar, dass die Einheit nicht die sinnliche Discretion behalten darf, mit welcher ihre Kindheit begonnen hat. Die Einheit, sofern sie die Unendlichkeit in sich enthält, ist nicht mehr discrete, sondern continuirliche Bestimmtheit. Eins ist nicht günstigsten Falls dasjenige, was ich mit dem gelben Fleck der

---

[1]) R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis I, 50.

[2]) Disc. Lugduni Bat. 1699. Dial. I, p. 34. = opp. XIII. p. 41.

Netzhaut messen kann; Einheit ist überhaupt nicht unmittelbares Prädicat sinnlicher Wahrnehmung; Einheit ist eine Bestimmung, in welcher das Bewusstsein des Denkens sich bethätigt, im Unterschiede von dem der Empfindung, und selbst der Anschauung.

Diese tiefere Bedeutung der Einheit, welche in der Continuität des Bewusstseins wurzelt, und demgemäss die continuirliche Unendlichkeit in sich fasst, übersteigt daher den Charakter der Quantität überhaupt. Diese alle Discretion überwindende, und dennoch eine schärfere und gediegenere Bestimmtheit erzielende Bedeutung der Einheit ist die Einheit der Qualität, welche alle Qualität des Seins in sich begründet. Ohne diese continuirliche Messung bliebe alles Sein blos sinnlich qualificirbar, dem Auge oder der Zunge. Qualität im Sinne der mathematischen Naturwissenschaft beruht auf der Bestimmung derjenigen Art von Realität, zu welcher die Infinitesimal-Rechnung die Masseinheit liefert. In der continuirlichen Einheit sind Quantität und Qualität verbunden, begrifflich durchdrungen. Die qualitative Einheit ist die Realität. Man kann daher auch sagen: die Continuität ist diejenige Qualität, welche die Quantität der Zahl-Einheit zum Unendlichkleinen der Realität vertieft.

In diesem Unterschiede zwischen Realitäts-Grösse und Vergleichungs-Grösse besteht der Unterschied zwischen Qualität und Quantität, zwischen extensiver und infinitesimaler oder intensiver Zahl. Dieser Fortgang ist nothwendig für die Constituirung des Realen, wie nach dem Begriff der Zahl selbst. Denn das Zählen setzt eine Bedingung voraus, in keinem Punkte Halt zu machen. Die Einheit darf nirgend abgebrochen werden. Jede Einheit ist also willkürlich, nicht nur etwa als Zahlzeichen, sondern auch als Zahlgrösse; ausgenommen allein diejenige Einheit, welche alle Discretheit in ihrem Begriffe von sich ausschliesst: damit aber erst dem Seienden einen echten, wenngleich keinen festen Ruhepunkt darbietet. Und jetzt erst können Einheiten bestimmt und unterschieden werden, nicht als discrete, sinnliche Individualitäten, sondern als reale Grössen. Reale Grössen liefert nimmermehr die sinnliche Anschauung, noch auch an und für sich die reine geometrische Anschauung; sondern zu deren Herstellung bedarf es der In-

finitesimal-Rechnung. So sehen wir denn, wie auch die Zahl das Differential vorbereitet hat: die Einheit der Zahl die Einheit der Realität.

45. Continuität und Veränderung. — In der geometrischen Vorbereitung des Differentialbegriffes hatte sich die positive Bedeutung des Unendlichkleinen im Unterschiede von dem negativen Begriffe der Grenze in der Erzeugung des Raum-Gebildes bewährt (39). Das war uns die Bedeutung des Tangenten-Problems: dass in der Tangente der Begriff der Curve definirt, die Curve selbst erzeugt wurde. Das Unendliche lässt das Endliche aus sich entstehen. Diese Bedeutung hat auch die infinitesimale Zahl: sie stellt nicht nur die Realitäts-Einheit dar; sondern sie realisirt als solche; sie verleiht dem Sein in der Qualität die Realität. Diese realisirende Bedeutung der Zahl kommt in dem Begriffe der Function zum Durchbruch.

Zu diesem Ergebniss führt in einer der geometrischen Entwickelung analogen Weise das Princip der Bewegung. Die Verallgemeinerung der Einheit, welche in der von Vieta eingeführten Buchstaben-Rechnung gegeben war, würde allein die erzeugende Gesetzmässigkeit der Zahl-Einheit nicht dargethan haben. Auch die mächtige Ausbildung, welche das Hilfsmittel der Reihe für die Ausmessung der Figuren in jener Zeit erfahren hat, konnte nur vermittelst des Gedankens der Bewegung die Continuität als das Princip der Reihe an den Tag fördern. Die Zahl aber, als beweglich gedacht, ist die Variable. Mit der Variabilität kommt der Werth-Charakter der Zahl zu voller Deutlichkeit. Denn die Variabilität setzt die Continuität voraus. Die Bewegung, die Veränderung der Zahl ist nicht eine äusserliche, willkürliche in jedem Sinne, sondern durch die Freiheit, welche in dem Gesetz der Continuität liegt, gebundene. Die Zahl repräsentirt in der continuirlichen Variabilität die Grösse überhaupt als Werth, weil sie alle Werthe derselben aus sich erzeugt, in sich darstellt. Die Zahl-Grösse wird damit zum Werth-Begriff, und nähert sich so ihrer eigentlichen Bestimmung, die sie in der Realisirung erfüllt.

Wallis möchte daher mit seiner Arithmetica Infinitorum in der Entwickelung des Gedankens der Continuität den Fortschritt bezeichnen, dass er das Princip der Inter-

polation verallgemeinert hat[1]). Hierin aber folgt er dem Gedanken, dem der Logarithmus entsprungen, und der das Vorbild des Begriffs der Fluxion geworden ist. Dagegen hat auch Wallis für die Anwendung seiner Zahl-Untersuchungen auf die geometrischen Probleme „die Methode Cavalleri's unverändert zu Grunde gelegt".[2]) Diese Anwendung ist keine äusserliche, auch bei Wallis nicht; und doch kommt erst durch das Differential diese innere Verbindung der Probleme zur Klarheit. Erst mit dem Differential gelangt der Begriff der Function zur Gestaltung, der die Veränderung als eine continuirliche definirt.

Auch in diesen analytischen Untersuchungen bleibt die Grenze nur negativ. Fermat's Methode zur Bestimmung der Maxima und Minima gebraucht das e als eine sehr kleine Grösse, um welche die Abscisse x vermehrt wird, und welche, wenn sie ihre Dienste bei der Rechnung gethan, wieder abgeworfen werden kann. Aber das e wird nicht gedacht als der Quell, aus welchem das x selbst herfliesst und beständig sich nähren muss. Diese Bedeutung kann der unendlichen Hilfsgrösse nur zuwachsen aus einer von der blossen Anwendung auf Geometrie freien Algebra, welche vielmehr dem Problem, dem jene dient, ihrerseits selbständige Grundbegriffe und Methoden darzubieten und zu erfinden vermochte.

46. Continuität und Zeit. Barrow. — Zu dieser Entwickelung der Algebra war eine fernere Ausbildung des Begriffs der Continuität erforderlich. Nicht nur in Bezug auf das Denken war die Continuität zu erweitern, während sie bei den Griechen nur für die unendliche Theilbarkeit des Raumes angenommen wurde. Wie die Continuität analog der Identität als eine fundamentale Gesetzlichkeit des Denkens nothwendig und an der Qualität vollzogen wurde, so musste auch in den sinnlichen Grundlagen der Ursprung dieses Grundbegriffs an der rechten Stelle erst erfasst werden: nicht im Raume, sondern in der Zeit. Dadurch erst ward die Verbindung von Anschauung und Denken möglich, welche in dem Grundsatz der intensiven Grösse als der der Realität sich vollzieht.

Die Zeit ist der allgemeine Ausdruck derjenigen Gesetzlichkeit, deren Problem die Bewegung ist. An dem Begriffe der

---

[1]) A. Arneth, Geschichte der reinen Mathematik S. 252.
[2]) Gerhardt, a. a. O. S. 36.

Bewegung aber hing, wie wir gesehen haben, nicht nur die geometrische Vorbereitung des Differentialbegriffs zum erzeugenden Begriffe der Curve (38, 39); sondern ebensosehr die arithmetische Ausbildung der Einheit zur variabeln Realität (44). Es musste daher die Bedeutung der Zeit für den Begriff der Continuität gewürdigt und verwerthet werden. Vom Continuum reden Alle; das Continuum auszumessen, ist das allgemeine Problem. Die Bewegung ist seit Kepler und Cavalleri dafür in Anspruch genommen; aber nicht die allgemeine Grundlage derselben, die Zeit. Erst in der Zeit wird die continuirliche Zahl-Einheit mit dem continuirlichen Raum-Gebild verbunden. Diesen Fortschritt in der Vorbereitung des Differentialbegriffs bezeichnet Barrow.

Barrow vertheidigt zwar die Methode Cavalleri's, aber er setzt das Untheilbare nicht mehr blos negativ, überwindet also die Grenze. So gelangt er zu seinem triangulum characteristicum, zwischen tangentialem Curvenstück, der Abscisse und Ordinate des Curven-Punktes, als einem unendlichkleinen und dennoch geometrisch begrenzten Gebilde. Dieser Fortschritt in der Handhabung des Unendlichkleinen erklärt sich aus der grösseren Bestimmtheit, mit welcher der Begriff der Continuität hier in den Mittelpunkt der Untersuchung gestellt wird. Und diese bevorzugte Stellung gewinnt hinwiederum die Continuität nur dadurch, dass sie hier mit dem Begriffe der Zeit in genauere Verbindung gebracht wird.

Barrow untersucht die Arten der Bewegung, das Verhältniss von Zeit und Geschwindigkeit, und er ermittelt so aus der Zusammensetzung der Bewegungen die Eigenschaften der Curven.[1]) Indem er hierbei die Continuität der Grössen voraussetzt, schliesst er von derselben auf die Continuität der Bewegung und der Zeit. So geht er von der Continuität der Grössen zwar aus, zugleich aber von derselben fort zu der der Zeit. „Ob magnitudinis quippe continuitatem continuus est motus, et propter motum tempus quoque continuum est.“[2]) Durch diese Consequenz wird sachlich vielmehr der Begriff der Continuität aus der Zeit abgeleitet; wie aus derselben vermittelst der Bewegung die räumlichen Grössen erzeugt wurden.

---

[1]) Gerhardt, Entdeckung S. 45. — [2]) ib. S. 78.

So vermittelt Barrow den Gedanken: die Continuität in der Zeit zu begründen.

Diese tiefere Fassung des Begriffes der Continuität erweist bei Barrow selbst ihre Fruchtbarkeit an dem Begriffe der Grösse, von dem er ausgegangen war: der Begriff der intensiven Grösse bereitet sich vor. Die Schwierigkeiten, die man an Cavalleri's Methode gefunden hatte, dass die Indivisibilia den Gebilden heterogen seien, die mittelst ihrer ausgemessen werden sollten, diese im unreifen Gedanken des Unendlichen beruhenden Zweifel sind für Barrow nicht mehr vorhanden: Flächen, Linien und Punkte sind ihm nur ideelle Unterscheidungen der Einen continuirlichen Grösse. Non existimo superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam aut propriam ex se ipsis efficaciam possidere, vel aliter a solida magnitudine quam κατ' ἐπίνοιαν distingui; sed unicam potius arbitror ex parte rei magnitudinem dari. Hiermit war in der Sache der antike Begriff der Grenze überwunden. Eine von der Fessel der Raum-Anschauung emancipirte Zeit-Anschauung war zum Hebel auch der geometrischen Anschauung gemacht. Die Continuität der Einen Grösse, auf die Continuität der Zeit zurückgeführt, anerkennt an dem Indivisibile die Macht und Geltung des Erzeugenden.

Von Barrow führt daher der Weg direct nicht nur zu seinem Schüler Newton, sondern ebenso auch zu Leibniz. Ob Leibniz Barrow's Lectiones geometricas vor der eigenen Entdeckung gekannt haben müsse oder nicht: diese Frage gewinnt von unserem Gesichtspunkte aus eine ganz andere Beleuchtung. Das Originale bei Barrow ist nämlich nicht sowol das charakteristische Dreieck, als vielmehr seine Auffassung der Continuität. Für diese aber sind Leibniz' Ansichten von allen Seiten aus bereitet. Zur Präcisirung des Continuitätsbegriffs drängt in Leibniz Alles hin, seine Geometrie und Analysis nicht nur, sondern umfassender und mächtiger seine systematische Weltansicht. Man müsste annehmen, dass seine ganze Philosophie erstlich nichts Eigenes und Ursprüngliches, dann aber auch, dass sie sammt und sonders von Barrow entlehnt sei, wenn man seinen Differentialbegriff für eine Entlehnung von Barrow halten soll.

47. Galilei's partes non quantae. — Barrow bildet

nicht nur zeitlich und den äusseren Umständen nach die Vermittelung mit den Entdeckern der Infinitesimal-Rechnung; sondern in ihm macht sich zugleich das dritte Motiv geltend, welches für die Entdeckung entscheidend war. Denn der Punkt, welcher die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung bezeichnet, bezieht sich über geometrische Verhältnisse und Fictionen hinaus auf reale Naturvorgänge. In diesem Zusammenhange mit dem mechanischen Problem entsteht in letzter Instanz der Differentialbegriff (34). In dieser End-Bedeutung aber findet sich der Gebrauch des Unendlichkleinen bereits bei dem Manne, welcher zur Verwerthung desselben die ersten grossen Grundlagen gelegt und gesichert hat. Galilei nimmt das Unendliche im Sinne der erzeugenden Realität bei seiner Definition und Demonstration des Begriffes der beschleunigenden Kraft. Somit führt ein gerader Weg über das Tangenten-Problem und die Reihen-Entwickelung von Galilei zu Newton, nicht minder aber zu Leibniz. Denn auch bei Leibniz' Conceptionen hat der mechanische Gedanke die intensive Grösse des Unendlichkleinen wenn nicht erzeugt, so doch erfüllt und vollendet.

Wir haben bereits gesehen, dass für Galilei in der Einheit die Unendlichkeit liegt. Sein Genius war also darauf gerichtet: aus dem Unendlichen das Endliche zu constituiren. Er macht den grossen Unterschied zwischen dem Constituiren aus erforderlichen Denk-Bedingungen und dem Componiren aus sinnlichen Theilen. Ein hauptsächlicher Einwand gegen die Lehre vom Untheilbaren sei, sagt er, dass ein Untheilbares, mit einem anderen Untheilbaren verbunden, das theilbare Ding nicht hervorzubringen vermöchte: In hac et aliis similibus objectionibus adversario satisfacere possumus, dicendo non solum non duo, sed nec decem, nec centum, nec mille indivisibilia quantitatem divisibilem posse componere; sed bene infinita.[1]) In solcher Positivität unterscheidet Galilei das Unendliche von den endlichen Zahlen bezüglich der Kraft der Constituirung.

Demgemäss lehnt Galilei auch die sinnliche Demonstration und den Einzigen Beweis aus derselben ab, weil gerade aus der Denk-Bestimmung die sinnliche Gegebenheit legitimirt

[1]) Disc. p. 28 = opp. XIII, p. 35.

werden soll. Die resolutio der Linie in infinita sua puncta enthalte keine grössere Schwierigkeit, als ihre divisio in suas partes quantas, unter der Einen Voraussetzung, von der er erwartet, dass sie ihm nicht verweigert werde: Et haec est, ne a me postules, ut tibi ab invicem ista puncta separem, eaque tibi super hac charta distincte ostendam singula.[1])

Aber nicht allein die sinnliche Gegebenheit überhaupt sucht er als ein Continuum in ein Unendliches aufzulösen und aus demselben zu constituiren; sondern er ist consequent und für philosophische Fixirung der Grundbegriffe interessirt genug, um dieser Auflösung gemäss die Grösse selbst, den Begriff der Grösse einzutheilen: so dass die Quantität zu einer Unterart der Grösse wird. Et ex eo ipso, quod partes sint infinitae concluditur, eas esse non quantas, cum quanta infinita faciant extensionem infinitam... Eo ipso quod divisio in partes quantas perpetuo continuari possit, necessitas compositionis ex infinitis non quantis introducitur.[2]) So sehen wir, dass Galilei die Nothwendigkeit ausspricht, das continuirliche Quantum in Theile aufzulösen, die er als non quantas bezeichnet, oder auch als Atome. At vero si ea quam Ego propono, utantur methodo distinguendi et resolvendi unico tantum tractu (quod artificium negare mihi non debent) ipsos acquiescere debere crederem, hancque continui ex atomis absolute indivisibilibus compositionem admittere.[3]) Indem er diese Theile als Atome, als non quantas bezeichnet, so verändert er den Begriff der Grösse.

Ich habe nicht gefunden, dass Galilei für diese seine Erzeugungs-Grössen anstatt der Quantität überhaupt den Terminus der Qualität eingeführt hätte. Dagegen aber fehlt nicht das entsprechende Glied des anderen Ausdrucks dieses Gegensatzes: der Unterscheidung von Extension und Intension. Und wenn bei der Auflösung der discreten Quanta in unendliche Atome noch nicht prägnant genug die Einsicht hervorgetreten sein sollte, dass es sich um Ueberwindung des Sinnlichen durch Denk-Bestimmungen handle, und zwar um Denk-Bestimmungen, welche mit der Aristotelischen Unterscheidung von

---

[1]) Disc. p. 43 = XIII, p. 50. — [2]) ib. 31 = XIII, 38. — [3]) ib. 44 = 51.

potentiellem und actuellem Sein nichts gemein haben[1]) — so lässt dieser Gesichtspunkt bei der Unterscheidung von Extension und Intension an Deutlichkeit nichts vermissen. Diese Unterscheidung aber findet sich bei der Darlegung der Fallgesetze, und sie bildet, man darf sagen, das schöpferische Motiv in dieser fundamentalen Entdeckung. Darin aber erweist und bewährt sich das dritte Motiv, welches wir hier für die Entdeckung des Differentialbegriffs, und zwar als das durchschlagende, geltend machen.

48. Der infinitesimale Begriff der Beschleunigung. — Galilei's Fallgesetze sind das Prototyp der Naturkräfte. Indem wir daher zeigen, dass in den Fallgesetzen der infinitesimale Gedanke sich schöpferisch erwiesen hat, so bewähren wir denselben als einen mechanischen Grundbegriff. Der Begriff der Beschleunigung ist das Ergebniss jener Methodus Indivisibilium, die Galilei mit Cavalleri gemeinsam ist. Es ist also keineswegs die „Muskel-Empfindung" welche Galilei bei diesem Grundgedanken leitet; mit solchen sinnlichen Exemplificationen am eigenen Leibe war der dichte Schleier nicht zu lüften, der über die ganze Natur ausgebreitet ist. An anthropomorphen Vorstellungsweisen hat es dem Alterthum und dem Mittelalter wahrlich nicht gemangelt, um die Gewalt der Naturnothwendigkeit zu beschreiben und zu versinnlichen. Wenn der Gedanke des Naturgesetzes gefunden und an Stelle der Naturmacht und -Nothwendigkeit gesetzt werden sollte, so galt es, im Begriffe, nicht in sinnbildlichen Vorstellungen diesen neuen Gedanken, den Gedanken der mathematischen Renaissance zu fixiren.

Galilei selbst lässt es an nachdrücklichen Hinweisen nicht fehlen, dass er das mente concipio als einen nothwendigen Bestandtheil seiner Entdeckungen betrachtet hat: nur war es ihm angelegen, diesen Ausdruck und seine psychologische Unbestimmtheit zu erkenntnisskritischer Präcision zu bringen. Eine solche Präcision gewinnt nun auch derjenige Grundbegriff, welcher als das Fundament der ganzen Mechanik gilt, das Princip der Trägheit. Aber auch dieses Princip κατ' ἐξοχήν ist eine im Denken für das Erkennen entworfene Grundlage, welche als eine Consequenz der Continui-

[1]) Disc. 32 = 38.

tät angesehen werden darf. Die Beharrung in Richtung und Geschwindigkeit ist daher nicht als „Naturthatsache“ zu bezeichnen, die der blossen „Denknothwendigkeit“ gegenübersteht. Diese Alternative ist eben nicht ausreichend. Die Trägheit ist freilich keine „Denknothwendigkeit“ im Sinne der Aristotelischen Metaphysik; aber sie ist eine Erkenntniss-Bedingung im Sinne derjenigen Grundlagen der mathematischen Naturwissenschaft, deren Fundamentirung durch Newton vollzogen und durch Kant systematisirt, — von Galilei aber begonnen wurde.

Die Beharrung ist eine Voraussetzung zum Zwecke des Naturerkennens, nicht aber selbst eine Naturthatsache. Dühring erkennt selbst an und führt es lichtvoll aus, dass Galilei's Vorstellung stets punctuell sei, dass die Zurückführung auf die unendlichkleinen Zeittheilchen ihm wesentlich sei. Diese sind aber eben keine Naturthatsachen. Auch hier zeigt sich ein Rest von Unklarheit in diesem sonst überaus verdienstlichen Theile des Werkes, dass es für gleichgiltig erklärt wird, wie die elementare Geschwindigkeit selbst entstehe.[1]) Es hätte vielmehr niemals zu einer Summirung der Impulse kommen können, wenn nicht der entstehende Impuls selbst bereits als ein infinitesimaler Gegensatz zur Quantität, das will sagen, in der Ergänzung und Vertiefung derselben entstehend gedacht worden wäre.

Der Definition von Axiomen der gleichförmigen Bewegung liegt die Voraussetzung der Zeit zu Grunde; man könnte sie Definitionen und Erläuterungen der Zeit nennen. Auch der Raum wird aus der Zeit im ersten Axiom abgeleitet. Ebenso beruht die Kraft als die Beschleunigung auf der Voraussetzung des Zeit-Continuums. Nur aus dieser Voraussetzung gehen die Erwägungen hervor, welche Galilei im Eingang seines zweiten Buches am dritten Tage anstellt. Quod facile intelligimus, maximam temporis atque motus infinitatem inspicientes sicut motus aequabilitas et uniformitas per temporum spatiorumque aequabilitates definitur atque concipitur, . . ita per easdem aequabilitates partium temporis incrementa celeritatis simpliciter facta percipere possumus; mente concipientes motum illum ... et sic a recta ratione absonum nequaquam esse

---

[1]) E. Dühring, Gesch. der allg. Principien der Mechanik S. 30, 33.

videtur, si accipiamus, intensionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem[1]). Diese Entgegensetzung von Intensiv und Extensiv entspricht der von resolutio in partes non quantas und divisio in partes quantas. Wir sehen hier dasselbe Bedürfniss, dem Quantum als dem Extensiven ein dasselbe vertiefendes, erzeugendes Moment gegenüberzustellen. Wie dort das erzeugende Element der Zusammensetzung in dem Indivisibile, so liegt hier in der Intensio das Motiv der Kraft[2]).

Daher kommt die Intensio in eminenter Weise der Beschleunigung zu. Denn die Geschwindigkeit ist einfach der Zeit proportional zu setzen, da sie die gleichartige, nämlich extensive Anwendung der Zeit auf den Raum bedeutet. Auch hier zwar hat Galilei zu der Definition der gleichförmigen Bewegung ein wichtiges Wort und eine bemerkenswerthe Warnung hinzugefügt. Visum est addere veteri definitioni (quae simpliciter appellat motum aequabilem dum temporibus aequalibus aequalia transiguntur spatia) particulam quibuscunque, hoc est omnibus temporibus aequalibus; fieri enim potest, ut temporibus aliquibus mobile pertranseat spatia aequalia, dum tamen spatia transacta in partibus eorundem minoribus, licet aequalibus, aequalia non sint[3]). Die Geschwindigkeit kann man also anfänglich noch in sinnlicher Naivetät vorstellen als ein Attribut der Zeit am Raume, obschon auch bei ihr das Zurückgehen auf die infinitesimalen Zeittheilchen nothwendig wird. Bei der Beschleunigung dagegen ist die Erfassung des Infinitesimalen von vornherein nicht zu umgehen, weil sie in der Bestimmung des Fallraumes dem Problem der Constituirung des realen Continuums angehört, die entscheidende Wendung desselben darstellt. Die Beschleunigung kann nicht mehr in sinnlicher Weise vorgestellt, sie muss vielmehr als das die sinnliche Gegebenheit zur Realität bringende Moment angesehen werden. Sie wird zur Bewegungs-Ursache. Dieser Ursachen-Charakter der Beschleunigung ist der Gedanke der infinitesimalen Constitution.

Die Macht dieses Gedankens zeigt sich in dem Princip der Beharrung, und zwar für die Bewegung in Richtung und Geschwindigkeit. Dieses Princip ist bekanntlich eine Paradoxie, da

[1]) Disc. p. 141 = XIII, 155. — [2]) Dagegen Suarez, Disp. metaph. II, p. 488: Velocitas motus non est proprie intensio, sed est veluti condensatio partium motus intra brevius tempus. cf. 492, 2. — [3]) Disc. p. 141 = XIII, 155.

es nur für die Ruhe unmittelbar einleuchtet. Aber die Paradoxie wird durch denselben Gedanken gehoben, welcher auch das Tangenten-Problem gelöst hat. Die geradlinige Fortsetzung der Bewegung ist nichts anderes als die infinitesimale Voraussetzung, dass ein jeder untheilbare Punkt der sich bewegenden Linie eine Gerade sei. So wird durch den Begriff der infinitesimalen Geradheit Zeno's fliegender Pfeil beseitigt. Durch solche continuirliche, die Beharrung involvirende Erzeugung erlangt das Continuum die Präcision des Begriffs. Wie bei der geometrischen Frage das Untheilbare diese erzeugende Bedeutung des Quantum hat, so wird gegenüber der Extension der Zeit durch die Intension der Geschwindigkeit die Kraft der Beschleunigung bezeichnet. Die Extension ist sinnlich, wie dort das Quantum. Die Intension als das Untheilbare, Unendliche ist der Grad (gradus), welcher somit für die Bewegung eine neue Art von Grösse einführt.

49. Uebergang zu Leibniz. — Bevor demnach der Differentialbegriff fixirt war, ist seine Wirksamkeit und Geltung in demjenigen Zusammenhange der Forschung latent, für dessen Ausbau seine Entdeckung hinausgeführt wurde. Das ist der denkbar günstigste Beleg für unsere Ansicht von der Aequipollenz der oben bezeichneten Begriffe. Das Differential soll uns diejenige Stufe der Objectivirung bedeuten, welche als Realität auszuzeichnen sei, welche ebensosehr von der extensiven Grösse der Zahlfiction, wie von den immer nur als Proportion zu denkenden Verhältnissen der Substanz und Causalität zu unterscheiden sei (31). Die Bestimmungen, welche durch Differential-Gleichungen an Raum- und Zeit-Punkten getroffen werden, bedeuten nichts Geringeres an objectiver Gültigkeit als Kraft-Beziehungen. Das Erste und vorbildliche Beispiel der Kraft ist das Fallgesetz. Und an demselben erkennen wir die Methode des Unendlichkleinen als den schöpferischen Grundgedanken. Das ist von jeher anerkannt gewesen und geblieben. So zweifele man denn auch nicht, dass die Begründung des Differentialbegriffs in dieser seiner erkenntnisskritischen, und nicht in einer zudem für das Ausrechnen einer Grenze vermissten logischen Bedeutung liege.

Andererseits aber könnte es sonderbar erscheinen, dass Galilei das Instrument, dessen er bedurfte, schon benutzt habe, während Andere nach ihm dasselbe erst eingerichtet hätten.

Indessen gewahren wir in der gesammten Entwickelung der mathematischen Naturwissenschaft, und insbesondere bei ihrer Neugründung das bald mehr, bald minder bestimmt hervortretende Desiderat dieses Epoche machenden Gedankens. Und endlich, bei aller der Genialität, die Galilei's Darstellung kennzeichnet, und trotz dem klaren Bewusstsein von dem gedanklichen Bedürfniss, dessen Befriedigung seine eminente historische Bedeutung ausmacht — dennoch vermag auch er die begriffliche Lücke nicht ganz zu decken, die das Untheilbare vom Differential trennt. Als solche Zeugen seiner Schwäche verstehen wir die Ausdrücke, welche Galilei häuft, um die entstehende Bewegung von der fertigen zu unterscheiden: L'Impeto, il talento, l'energia, il momento del discendere[1]); il momento e la propensione al moto[2]); quali furono gl'impeti ... tali ... i gradi[3]). Durch diese Ausdrücke wird nur sinnlich das Bestreben beschrieben, nicht begrifflich fixirt. Diese Unklarheit scheint Leibniz an der interessanten Stelle[4]), an welcher er sein Verhältniss zu Galilei berührt, durch den Ausdruck der „embryonalen Impetuosität" getroffen zu haben. In der That ist die infinitesimale Beschleunigung nicht der Embryo, sondern die erzeugende Realität.

Sehen wir jedoch von diesem Mangel ab, dass Galilei sein Untheilbares als Intension, aber noch nicht als Realität bezeichnet und somit den Gedanken des Infinitesimalen noch nicht zur Reife zu bringen vermocht hat, so erkennen wir doch die realisirende Bedeutung der Beschleunigung, welche die Fallräume hervorbringt, wie sie selbst vermittelst der Geschwindigkeit von der continuirlichen Zeit hervorgebracht wurde. Somit bot das Dreieck der Fallräume eine historisch hinreichende Anregung, mit welcher Leibniz Barrow's charakteristischen Triangel füglich entbehren konnte.

---

[1]) XIII, p. 174. — [2]) ib. 176. — [3]) ib. 177. Diese italien. Ausführung des Schol. ist in der latein. Ausgabe von 1699 nicht enthalten. — [4]) Math. Schriften IV, p. 159; Brief an Varignon.

II. Geschichte.

50. Das Differential als Entdeckung des philosophischen Systematikers. — Es ist ein beredtes Zeugniss für den erkenntnisskritischen Grund des Differentialbegriffs, dass derselbe im Zusammenhange eines philosophischen Systems entdeckt worden ist. Nicht schlechthin im Interesse der Lösung und Erweiterung der rein mathematischen Probleme hat Leibniz die infinitesimale Grösse eingeführt, sondern im Zusammenhang derjenigen Erwägungen, welche der Sicherung der Realität der Dinge in seinem Denken gewidmet waren. In diesem erkenntnisskritischen Sinne behandelt er vorzugsweise die Zahlen unter den mathematischen Grundbegriffen.

Vetus verbum est, Deum omnia pondere, mensura, numero fecisse. Sunt autem quae ponderari non possunt, ... sunt etiam quae carent partibus ac proinde mensuram non recipiunt. Sed nihil est quod numerum non patiatur. Itaque numerus quasi figura Metaphysica est, et Arithmetica est quaedam Statica Universi, qua rerum potentiae explorantur.[1]) Diese eminent metaphysische Bedeutung hat die Zahl überhaupt für Leibniz. So hat er denn zum Behufe der Metaphysik den Zahlbegriff vertieft, die Zahlgrösse erweitert.

Auch die Mechanik bildet ihm keinen Gegensatz zur Metaphysik. Er rühmt sich erkannt zu haben: que tout se fait mécaniquement et métaphysiquement en même tems dans les phénomènes de la nature; mais que la source de la mécanique est dans la métaphysique.[2]) Also muss auch das mechanische Motiv des Differentialbegriffs seine erkenntnisskritische Wurzel haben.

51. Die Monade, die Realität und das Einfache. — Indem wir nunmehr zu Leibniz übergehen, können wir also von allen Seiten seiner Philosophie zum Infinitesimalen den Zugang suchen. Schon seine Psychologie fordert dasselbe in den perceptions petites, die das Leben des Bewusstseins bilden,

[1]) Leibniz' opp. edd. Erdmann p. 162. — [2]) ib. p. 702.

wie die kleinen Erschütterungen der Meereswellen das Brausen derselben hervorrufen. Sogar seine Ethik verwerthet diesen Grundgedanken, indem der Schein der Indifférence d'équilibre auf die perceptions insensibles zurückgeführt wird. Demgemäss beruht seine systematische Quintessenz, die prästabilirte Harmonie auf dieser Ansicht, die bei aller Analogisirung des Bewusstseins mit der Materie zugleich hinwiederum die Dinge in das Unendliche dieser kleinen Vorstellungen auflöst. Denn diesem Unendlichen im Bewusstsein entspricht in der Natur der Dinge die Monade, als der Ankergrund des Realen.

Man kann an der Leibnizischen Speculation über das Verhältniss von Monade und Substanz die Forderung einer Unterscheidung sich zugänglich und eindringlich machen, die zwischen der mathematischen Kategorie der Realität und der dynamischen der Substanz im Kantischen Sinne festgesetzt und begründet werden muss. Das Schwanken des Ausdrucks bei Leibniz zwischen Substanz, Atom, Form und Realität für die Monade kennzeichnet den Mangel in der Disposition derjenigen Principien, deren Erforderniss Leibniz aufs tiefste begriffen und mit einer Lebendigkeit und Sicherheit des Bewusstseins entwickelt hatte, welche heute den Schein einer Anticipation der Kantischen Gliederungen erwecken könnte, wie denn Kant selbst eine solche Auslegung seiner Grundgedanken, unter der Gunst geschichtlicher Beleuchtung, seinem grossen Vorgänger hat angedeihen lassen. Aber das Interesse an einer den Fortgang der Probleme entwickelnden Geschichte der Philosophie wird nur dann diesen Zweck fördern, wenn die exacte Quellenforschung gewissenhaft betrieben wird, wenn die Projection der Probleme nur angestellt wird, um den Horizont des Forschers zu erweitern und sein Urtheil wie nicht minder seine receptive Capacität zu schärfen.

In dieser geschichtlichen Ansicht ist die Leibnizische Monadologie ohne intimere Rücksicht auf seine Dynamik nicht zu würdigen, nicht zu verstehen. Denn in der Monade will Leibniz principia unitatis substantialis in materia[1]) zu Grunde legen. Die Monade soll mithin im Unterschiede von den Relationen und Fictionen der Raum- und Zahl-

[1]) P. S. des ersten Briefes an Des Bosses von 1706. Erdm. p. 435.

begriffe die solide Basis des Realen bilden,[1]) wie wir hier eine solche in der Anticipation der Realität zu begründen versuchen. Aber der Grundfehler in der Monadenlehre möchte gerade darin bestehen, dass die Monade zugleich Realität und Substanz zu vertreten hat. Denn dieser Fehler greift über das angegebene Verhältniss hinaus, insofern nämlich die Monade als das Reale und als die Substanz zugleich auch das Einfache bedeutet. Die Unvollkommenheiten und Unrichtigkeiten wie die Paradoxien der Leibnizischen Lehre beruhen auf dieser Identificirung der Monade mit dem Einfachen.

Um von vornherein das Phänomen der Ausdehnung zu erklären, geht Leibniz von dem atomistischen Gedanken aus, dass alle Körper aus Einfachem zusammengesetzt sind. Und dieses Einfache repräsentiren die Monaden. Damit aber wird der ursprüngliche Gesichtspunkt für die Monade verschoben; denn vorzugsweise sollte durch dieselbe die Realisirung begründet werden. Anstatt der Realisirung wird dagegen durch die Einfachheit der Monaden die Ausdehnung und zwar als Zusammensetzung erklärt. Nun kann freilich das Einfache der Ausdehnung entbehren, dieweil das Ausgedehnte zum Zusammengesetzten geworden ist. Aber die Monade sollte das die Dinge realisirende Princip sein, nicht das den Raum phänomenalisirende. So wird die Monade in der That nur zum Hilfsmittel des phaenomenon bene fundatum, nicht zur Grundlage der Realität.

Man kann sich von dem Widerspruch, der in dieser Rücksicht gegen die Monadenlehre erhoben werden musste, bei Euler instruiren.[2]) Und es lässt sich verstehen, wie Euler, da ihn diese Paradoxie von den Monaden abstiess, damit zugleich gegen den analytischen Ausdruck der Monade, das Unendlichkleine von energischem Verdachte erfüllt wurde. Wollen wir dagegen den Differentialbegriff nach seiner principiellen Bedeutung bei seinem Entdecker begreifen, so müssen wir denselben auf das Interesse orientiren, aus dem er entsprungen ist. Dess-

---

[1]) Materia ipsa substantia non est, sed tantum substantiatum, Phaenomenon bene fundatum, et quod nunquam fallit eos qui progrediuntur ratiocinando juxta Leges **phantasticas** Arithmeticae, Geometriae, Dynamicae. (Leibniz an Conti in Newtons Opusc. I, p. 381.

[2]) Briefe an eine deutsche Prinzessin. Zweite Aufl. 1773. Bd. I, S. 211 ff.

halb gilt es, ohne zu der Idee des Einfachen abzulenken, vielmehr nur den Hinweis zu verfolgen, der im Differential von der Monade zur Realität führt. Dieser Weg geht durch den Begriff des Intensiven hindurch; sein Ursprung aber liegt in dem. Leibnizischen Urgesetz, dem Gesetz der Continuität.

52. Naturgesetze und veritates aeternae. — Das Gesetz der Continuität wird fast überall in Schriften und Briefen als das Fundament des Differential von Leibniz bezeichnet. Das Gesetz der Continuität aber ist unzweifelhaft als ein ideales metaphysisches Gesetz, als eine Regel von ihm betrachtet und bezeichnet worden, welche zwar von der Natur nirgend verletzt werde, also als ein Naturgesetz betrachtet werden könne, nichtsdestoweniger aber eine Idee, eine nothwendige Idee, und als solche eine ewige Wahrheit sei. Wenn nun aber das Unendliche auf der Idee des Gesetzes der Continuität sich gründet, so ist damit das Unendliche selbst in Leibnizischer Terminologie als Idee gefasst, als nothwendige Idee; und die Frage nach der Realität des Unendlichkleinen kann demgemäss nur den Sinn haben nach ihrem Charakter, ihrem Geltungswerthe als realisirender Idee; nicht aber nach ihrer existentialen Ausprägung in der Welt der sinnlichen Dinge. Vielmehr werden wir das Schwanken der Ausdrücke und Wendungen bei Leibniz, welche diese Frage betreffen, lediglich als in dem Mangel systematischer Gliederung und terminologischer Bestimmtheit der Grundbegriffe zu erkennen haben, nicht aber in einer mystischen Unklarheit über das Verhältniss der Wahrheiten zu den Wirklichkeiten.

Hätte es Leibniz gelingen können, zwischen Kategorie und Idee, Grundsatz und Princip zu unterscheiden, so würde er die präcise Begründung seiner Entdeckung erreicht haben, — und damit freilich zugleich den transscendentalen Idealismus. Erst Kants Antinomienlehre vermochte diejenige Unterscheidung an dem Unendlichen einzuführen, der zufolge derjenige Bestandtheil des Continuitäts-Gedankens, welcher das Einfache betrifft, zur Idee wird, während das auf die Realisirung des Continuums bezügliche Motiv als Kategorie und Grundsatz der Erfahrungslehre gilt. Weil Leibniz nicht von einem bestimmten Begriffe der Erkenntniss ausgeht, wie Kant von der mathematischen Naturwissenschaft oder

der Erfahrung, so macht er keinen präcisen Unterschied zwischen dem realisirenden Grundsatz des Unendlichen und dem regulativen Princip des Einfachen; vermischt vielmehr beide Bedeutungen in der Monade oder der Substanz, die er demgemäss auch Atom nennt. Dieses Schwanken zwischen metaphysischen Voraussetzungen, mathematischen Regeln und empirischen Ausgangspunkten verschuldet den Mangel an der philosophischen Begründung des Differentials, die er theilweise logisch leisten wollte; da er aber einsah, dass sie sich in logischen Distinctionen nicht erschöpfen lasse, tiefer durch die metaphysischen Grundlagen seines Apriorismus zu stützen sich bemühte. Dieser sein Apriorismus jedoch konnte das Räthsel des Unendlichen nicht bezwingen, weil ihm mit dem intellectus ipse, den er den Sinnen entgegenstellt, die Interpretation derjenigen Anforderungen nicht gelingen konnte, welche der Differentialbegriff erhebt und kraft der in ihm enthaltenen Voraussetzungen zur Lösung bringt. So löst er zwar diesen Knoten nicht; aber mit dem sicheren Bewusstsein von den Problemen, um die es sich handelt, zerlegt er die einzelnen, scheinbar einander widerstreitenden Motive und sucht sie zu vereinbaren. Der Nachweis dieser Thatsache hat nicht nur etwa ein historisches Interesse, sondern dient unmittelbar der sachlichen Erwägung und Verständigung. Denn da Leibniz bald mit Rücksicht auf seine Correspondenten, bald in eigener systematischer Unvollkommenheit unklare und schiefe Aeusserungen macht neben den tiefsten und zureichenden, so beseitigen wir die falschen Ansichten, welche aus den ersteren bei seinen Zeitgenossen und nächsten Nachfolgern entstanden sind und welche zum Theil noch jetzt auf jenen direct oder indirect beruhen, indem wir, ohne dieselben zu ignoriren oder wegzudeuteln, auch jenen letzteren die gebührende Rücksicht und hingebende Würdigung schenken.

53. Das Gesetz der Continuität. — In dem Briefe an Bayle vom Jahre 1687, in welchem Leibniz sein Gesetz der Continuität dergestalt entwickelt, dass er später auf diese Darlegung sich beruft, macht er dasselbe von dem Unendlichen abhängig, weil er es in mathematischer Formulirung ausdrücken will, weil seine Fruchtbarkeit ihm besonders in der mathematischen Forschung aufgegangen ist. Er bezeichnet es als principe de l'ordre général und sagt: il a son

origine de l'infini, il est absolument nécessaire dans la géometrie, mais il réussit encore dans la Physique. Er drückt es zuerst allgemein und mathematisch dahin aus, dass, wenn der Unterschied zweier Fälle unterhalb jeder gegebenen Grösse vermindert werden kann in datis ou dans ce qui est posé, derselbe auch vermindert werden können müsse unterhalb jeder gegebenen Grösse in quaesitis ou dans ce qui en résulte. Er fügt aber unmittelbar hinzu: ou pour parler plus familièrement: lorsque les cas (ou ce qui est donné) s'approchent continuellement et se perdent enfin l'un dans l'autre, il faut etc. Und er macht dieses Princip abhängig von einem allgemeinern: datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata. Es folgen sodann die Beispiele, und zwar zuerst die geometrischen, die Annäherung der Ellipse an die Parabel, darauf die physikalischen, die Auffassung der Ruhe als unendlichkleiner Geschwindigkeit ou comme une tardité infinie. Die letztere Vergleichung findet sich zum öfteren bei Galilei. Endlich sei auch die Gleichheit eine unendlichkleine Ungleichheit.[1])

Das Originale in dem Gedanken der Continuität besteht hiernach darin, dass es als das schöpferische Motiv der Analysis allenfalls einschliesslich von deren Anwendung auf die Physik geltend gemacht wird. In der That ist ja das Princip der Continuität ein alter, schon in der griechischen Philosophie wiederkehrender Gedanke, dessen prägnantere Gestaltung Leibniz daher zunächst lediglich in seiner mathematisch-naturwissenschaftlichen und zwar principiellen Verwerthung als sein Verdienst in Anspruch nehmen konnte. Allmählich jedoch änderte sich seine Ansicht von dem Verhältniss der Begriffe des Unendlichen und der Continuität zu einander: Die Continuität wurde zum Oberbegriff, aus welchem das Unendliche sich ableitet. Mit dieser Aenderung aber war die systematisch wichtigere Aenderung in der Correlation derjenigen Begriffe gegeben, welche den Unterschied von Sein und Denken betreffen. Nunmehr konnte die Frage erwogen werden: inwiefern das Unendliche, obzwar es selbst nicht existirt, dennoch und gerade desshalb in der Natur Geltung habe. Denn jetzt beruht das Sein des Unendlichen auf dem Gedanken der

[1]) Opp. edd. Erdmann p. 104 f.

Continuität. Die Continuität ist jetzt ein Princip als Idee und als Gesetz, ebensosehr der Vernunft als der Natur.

Schon in dem Briefe an Arnauld vom Jahre 1690 sagt Leibniz von den substances indivisibles, die das Aggregat des Körpers bilden, dass eine jede dieser Substanzen in ihrer Natur enthalte legem continuitatis seriei suarum operationum.[1]) Aber in der Replique aux Réflexions auf Bayle's Artikel Rorarius, vom Jahre 1702 wird das Gesetz der Continuität als ein ideales Element zum Fundament des gesammten Naturerkennens gemacht, als die umfassendste der Regeln, in deren Anwendung Mathematik zur Physik wird. Mit dieser erkenntnisskritischen Einsicht, welche ihm in diesem Zusammenhange aufgeht, gewinnt Leibniz die rechte Würdigung für das Princip, als dessen Urheber er sich nunmehr bezeichnet mit dem gleichen Stolze, mit dem er sich sonst auf das auch hier erwähnte System der prästabilirten Harmonie beruft. Nunmehr gewinnt er das Selbstverständniss von seinem Princip der Continuität als einem realisirenden Princip, welches diese Realisirung durch das Infinitesimale vollzieht, in welchem der Zusammenhang von Sein und Denken, von Ding und „Idee" hergestellt und begründet wird.

54. Continuität und Möglichkeit. — Die bezeichnete Vertiefung vollzieht Leibniz in der Erörterung des Begriffs der Möglichkeit, welchem die wichtigsten realen Grundbegriffe zugesellt wurden. Je reconnais que te tems, l'étendue le mouvement, et le continu en général de la manière qu'on les prend en mathématique, ne sont que des choses idéales, c'est à dire qui expriment les possibilités, tout comme font les nombres. Aber diese Idealität und Möglichkeit erzeugt erst die Realität und Wirklichkeit. Obschon die vollkommen gleichförmige Bewegung in der Natur nicht statt hat, néanmoins les phénomènes actuels de la nature sont ménagés et doivent l'être de telle sorte, qu'il ne se rencontre jamais rien, où la loi de la continuité (que j'ai entroduite...) et toutes les autres règles les plus exactes des Mathématiques soient violées. Et bien loin de cela, les choses ne sauroient être rendues intelligibles que par ces règles.... Ainsi quoique les méditations

[1]) Erdm. p. 107.

mathématiques soient idéales, cela ne diminue rien de leur utilité, parce que les choses actuelles ne sauroient s'écarter de leurs règles; et on peut dire en effet, que c'est en cela que consiste la réalité des phénomènes, qui les distingue des songes. [1])

Dieser letztere Zusatz besonders bezeichnet einen klaren und einfachen Fortschritt, den Leibniz über Descartes gewinnt; denn Descartes, der mit dem Problem des Verhältnisses der idealen Mathematik zur actuellen Wirklichkeit ringt, müht sich bekanntlich, auch vom Traume das Bewusstsein der Realität durch Kriterien zu unterscheiden. Hier sehen wir demnach Leibniz auf dem Höhepunkte erkenntnisskritischer Einsicht — wenn nur der Berg auf gesichertem Fundamente sich erhübe, wenn nur der Stufengang der Erwägungen, der ihn zu diesem Aussichtspunkte über das ganze Feld der Erfahrung hinnaufführte, allerwärts methodische Speculationen und nur solche anstellen liesse. Dazu fehlt es an der methodischen Bestimmtheit der Grundbegriffe, an derjenigen Festlegung, die der entscheidende Anfang Kantischer Erkenntnisskritik ist: an der Präcisirung der Vernunft selbst zunächst in mathematischer Naturwissenschaft.

Leibniz dagegen unterscheidet Metaphysik und Mathematik nicht blos in Bezug auf die Methode in beider Behandlung der ihnen gemeinsamen Probleme, sondern auch in der logischen Bestimmung der Grundbegriffe. So kehrt er im Zusammenhang der oben angeführten Sätze alsbald wieder den Unterschied hervor, der zwischen der metaphysischen und der mathematischen Bedeutung des Unendlichkleinen bestehe und bestehen bleiben könne. Die Mathematiker bedürften der metaphysischen Discussionen gar nicht, ni de s'embrasser de l'existence réelle (!) des points, des indivisibles, des infiniment petits, et des infinis à la rigueur. Unter der Realität der mathematischen Begriffe hatten wir hingegen soeben ihre ausschliessliche realisirende Bedeutung kennen gelernt. Jetzt genügt es, dass der Mathematiker anstatt der unendlichkleinen Grössen so kleine nehme, als es nöthig ist um zu zeigen, que l'erreur est moindre que celle qu'un adversaire voulait assigner, et par conséquent qu'on n'en saurait assigner aucune. Mit dieser Connivenz an

[1]) Erdm. p. 189 f.

die mathematische Beweisführung wird der schlüpfrige Pfad der sogenannten logischen Begründung des Differentials betreten, die hauptsächlich in der Aufhebung des Fehlers durch wieder andere Fehler besteht; während wenige Zeilen vorher die erkenntnisskritische, die realisirende Begründung gefunden war.

So nahe berühren sich in der lebendigen, sich erzeugenden Geschichte der Philosophie die schöpferischen, die Entwickelung spinnenden Gedanken: so tief innerlich aber zugleich scheidet sich das wahrhaft Neue, Originale von seinen geschichtlichen Vermittelungen. Nach Kantischer Erkenntnisskritik ist die Verwechselung von Realität und realer Existenz mit der Wurzel abgeschnitten; und die Wurzel einer neuen Methode, der transscendentalen treibt eine neue Art von logischen Erkenntnissen, nämlich solche der transscendentalen Logik, welche als erkenntnisskritische Grundlagen der Mathematiker des genauesten zu wahren hat, sofern er eine exacte Bestimmung seiner Grundbegriffe anstrebt. Die Exactheit selbst ist ein erkenntnisskritischer, nicht schlechthin den Wissenschaften immanenter Massstab.

Sehen wir nun aber von dieser in dem Fehler seiner Methode begründeten Unvollkommenheit ab, so finden wir auch anderwärts den genialen Gedanken bei Leibniz wieder, der eben auch seine Entdeckung gezeitigt hat, und der sich principiell in der Ableitung des Differentials aus dem Gesetz der Continuität ausspricht. Gerhardt macht daher eine Bemerkung, über deren Tragweite er jedoch weder in seinen Vorreden zu den einzelnen Bänden der von ihm herausgegebenen mathematischen Werke Leibnizens, noch in seinen Abhandlungen zur Entdeckung der höhern Analysis eine entsprechende Ausführung gemacht hat. Indem er nämlich Leibniz gegen den Vorwurf zu vertheidigen sucht, dass derselbe das Fundament der höheren Analysis nicht klar erkannt habe, macht er die vielsagende Einschränkung: „lediglich vermag ihn das Gesetz der Continuität, das er zuerst aufstellte, vor diesem Vorwurf zu schützen“.[1]) In der That liegt die Kraft solches Schutzes in diesem, und zwar nur in diesem Gesetze.

55. Das Unendliche und das Endliche. — Dieses

[1]) L. mathem. Schriften, Erste Abth. Bd. IV, S. 86.

Bewusstsein, dass in der Continuität die ganze neue Rechnung beruhe, spricht sich in einem Schreiben an Varignon[1]) aus, von welchem es freilich auch lebhaft und tief geweckt war. Leibniz hatte sich nämlich und zwar zu wiederholten Malen in einem unzulänglichen Vergleiche zu einer Relativirung des Unendlichkleinen verstanden: es sei wie ein Sandkorn zur Erde. Dieses Gleichniss hatten die Gegner für die authentische Bestimmung des Begriffs festgehalten, und so bittet Varignon, der für die Sache einen ausgezeichnet scharfen Namen erfindet, um Aufklärung. In seiner Antwort entschuldigt Leibniz den Vergleich durch populäre Rücksichten (pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde), und wiederum damit, dass er die mathematische Analyse von den metaphysischen Controversen nicht abhängig machen wolle. Dabei hat er einen Satz niedergeschrieben, und später behufs Auslassung in der Abschrift eingeklammert, der höchst charakteristisch ist für sein fortwährendes Schwanken in dieser Beziehung: d'autant qu'il ma paru, que l'infini pris à la rigueur doit avoir sa source dans l'interminé, sans quoy je ne voy pas moyen de trouver un fondement propre à le discerner du fini. Vielmehr aber ist das vermisste Mittel in dem Realitäts-Charakter des Unendlichen gegeben und gegründet. Varignon hatte diesen durchschlagenden Geltungswerth durch den vielsagenden Namen des Inépuisable bezeichnet: au lieu que j'ai appelé Infiniment petit ou differentielle d'une grandeur ce en quoy elle est inépuisable.

Leibniz hingegen versteht auch diese tiefe Bezeichnung, die für die Bedeutung der höheren Differentialien besonders von Nutzen ist, nur im Sinne des kleinsten Irrthums und des incomparablement petit. C'est peut être ce que vouz entendés Mr., en parlant de l'inépuisable. Dennoch aber — und darauf beschränkt sich Leibnizens Zurückweisung jenes Einwurfs — sei damit die Wissenschaft vom Unendlichen nicht auf „Fictionen" reducirt; denn es bleibt doch immer ein infini syncategorematique, wie die Schule rede, wofür er als Beispiel die Reihe nennt. Und so bleibt er zunächst bei der unzureichenden Erläuterung stehen: on peut dire de même que les infinis et infiniment petits sont tellement fondés que

[1]) Math. Schriften IV, S. 89 ff.

tout se fait dans la géometrie, et même dans la nature, comme si c'estaient des parfaites réalités, temoins non seulement nostre Analyse Geometrique des Transscendentes, mais encor ma loy de la continuité, en vertu de laquelle il est permis de considérer le repos comme un mouvement infiniment petit (c'est à dire comme équivalent à une espèce de son contradictoire), et la coincidence comme une distance infiniment petite, et l'égalité comme la dernière des inégalités etc. Aber wenige Zeilen später bringt er die ganze Kraft des Räsonnements, welche in der Continuität liegt, zu klarer Geltung: Cependant on peut dire en general, que toute la continuité est une chose idéale, et qu'il n'y a jamais rien dans la nature, qui ait des parties parfaitement uniformes, mais en recompense le réel ne laisse pas de se gouverner parfaitement par l'idéal et l'abstrait, et il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini, comme s'il y avait des atomes (c'est à dire des elements assignables de la nature) quoyqu'il n'y en ait point la matière estant actuellement sousdivisée sans fin; et que vice les règles de l'infini réussissent dans le fini, comme s'il y avait des infiniment petits metaphysiques, quoyqu'on n'en ait point besoin, et que la division de la matière ne parvienne jamais à des parcelles infiniment petites; c'est ce que tout se gouverne par raison, et que autrement il n'y aurait point de science ni règle, ce qui ne serait point conforme avec la nature du souverain principe.

Also liegt der Nerv des Beweises für die Indifferenz des Idealen und des Realen in diesem souveränen Princip. Ebenso heisst es in dem aus dem Manuscript der Bibliothek zu Hannover von Gerhardt herausgegebenen Specimen dynamicum pro admirandis naturae legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis: Huic Legi Continuitatis a mutatione saltum excludentis etiam illud consentaneum est, ut casus quietis haberi possit pro speciali casu motus, scilicet pro motu evanescente seu minimo, et ut casus aequalitatis haberi possit pro casu inaequalitatis evanescentis. Unde consequens est, Leges motuum tales assignari debere, ut non sit opus peculiaribus regulis pro corporibus aequalibus et quiescentibus . . . cavendum esse ne tales assignemus, quae non consentiant hypothesi quietem

pro motu novissimo aut aequalitatem pro ultima inaequalitate habenti, alioqui violabimus rerum harmoniam. Und darauf folgt die Berufung auf die Publication von 1687, wo er dieses principium ordinis generale bezeichnet habe: nascens ex infiniti et continui notione, accedente ad illud axioma, quod datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata.[1])

Und endlich schreibt Leibniz im Jahre 1713 an Wolff, der immerhin das Verdienst hat, als der Erste über die Infinitesimal-Rechnung Universitäts-Vorlesungen gehalten zu haben: Atque hoc consentaneum est Legi Continuitatis, a me olim in Novellis Literariis Baylianis primus propositae, et Legibus Motus applicatae: unde fit, ut in continuis extremum exclusivum tractari possit ut inclusivum, et ita ultimus casus, licet tota natura diversus, lateat in generali lege caeterorum, simulque paradoxa quadam ratione, .. et ut sic dicam, figura Philosophico-rhetorica punctum in linea ... comprehensus intelligi possit, tanquam punctum sit linea infinite parva seu evanescens ... aliaque id genus, quae Joachimus Jungius, vir profundissimus, toleranter vera appellasset, et quae inserviunt plurimum ad inveniendi artem, etsi meo judicio aliquid fictionis et imaginarii complectantur ... et alioqui Natura ordinatim semper, non per saltus procedens, legem continuitatis violare nequit.[2]) In dieser Ausführung sehen wir zufolge der Continuität das Exclusive als Inclusives bezeichnet, den letzten Fall als latent in dem allgemeinen Gesetze der übrigen, obzwar doch noch als der Natur nach verschieden gedacht. Und endlich wird der Nachdruck auf den Nutzen dieser „Fiction" für die Erfindungskunst gelegt.

56. Die reine Form der Bewegung. — Dieser Sinn und Werth des Infinitesimalen wird nun zwar für die Entdeckungen der Geometrie zunächst und reichlich geltend gemacht. Aber die Quelle dieses Werthes liegt jedoch in dem realisirenden Charakter, also in der Mechanik. Man darf vielleicht diese vornehmliche Tendenz zur Mechanik, dieses Einmünden aller Operationen mit dem Differentialbegriff in die letztere daraus erklären,

[1]) Math. Schhriften, Bd. VI, 249 f. — [2]) ib. Bd. V, 385.

dass Leibniz sowenig wie Newton zwischen Geometrie und Mechanik im Bezug auf die Reinheit beider einen Unterschied anzuerkennen vermag. Die Idee der Bewegung gehört für Leibniz unter die ewigen Formen. Dieser Gedanke findet sich in einer wichtigen und interessanten Abhandlung, die ebenfalls aus dem Hannoverschen Manuscript herausgegeben worden ist: De usu Geometriae Statu praesenti ac novissimis ejus incrementis, wie Leibniz später den Titel gefasst hat. In diesem Aufsatz aber wird die Mechanik gerade in Bezug auf ihre Reinheit so hochgestellt, weil die Geometrie in ihr wie auch in der Physik das schöpferische Element sei. Sane non est dubium ... et tempus venturum quo ignis ipse jugum subibit, quod caetera elementa jam patiuntur.[1])

Die Geometrie bildet die Vermittelung zwischen dem Geiste und den Dingen der Natur. Geometria una omnium formas illas medias et in caduca licet materia aeternas ac per se subsistentes contemplatur, quorum ideae menti nostrae velut insitae perire non possent, etsi omnis scientia historiarum et experimentorum extingueretur. Darauf beruhe der hohe Werth, den die Alten in die reinen Formen gesetzt haben, weil sie die Abstrationskraft und somit die Vollkommenheit des Geistes erhöhen. Eine solche Form sei ebenso wie die Ausdehnung auch die Bewegung: er sehe nicht, warum die Erzeugung des Parabel per motum projectorum weniger denkwürdig sei, als per coni planique sectionem. So sehen wir jene „Chicane einer falsch belehrten Vernunft",[2]) von welcher Kant redet, klar und bestimmt von Leibniz beseitigt. Physica ergo, quatenus perficere mentem potest, desinit in geometriam, nec ante ullum phaenomenon penitus in corporibus intelligemus, quam ex primis figurae motusque ideis derivavimus. Dieser Ausdruck jedoch: Physica desinit in geometriam erinnert lebhaft an denjenigen, welchen wir oben (S. 61) angeführt haben, dass: les règles du fini réussissent dans l'infini. Und auch für das Unendliche wird in der That hier die Geometrie als erste Instanz geltend gemacht. Nam filum labyrintho de compositione continui deque maximo et minimo ac indesignabili atque infinito nisi geometria praebere potest, ad

[1]) Math. Schriften, Bd. VII, 323. — [2]) Kritik d. r. Vernunft, S. 158.

metaphycicam vero solidam nemo veniet, nisi qui illas transiverit.

Aus diesen Anführungen geht genugsam hervor, dass, wenn Leibniz die Bedeutung des Infinitesimalen für die Geometrie hervorhebt, er damit die realisirende Bedeutung, die diesen Begriff auszeichnet, bereits in die Geometrie einführen will.

57. Die Ordnungen des Unendlichkleinen. — Es ist daher nicht nur eine Illustration, sondern eine Erweiterung, eine Vervollkommnung des Begriffes selbst, welche durch die Beziehung desselben auf Geometrie man darf vielleicht sagen ermöglicht wird. Denn an den geometrischen Bedeutungen des Differentials werden die höheren Ordnungen desselben nachgewiesen, welche mit dem ersten Differential an dem Tangenten-Problem bereits sich herausgestellt, alsdann aber ihrerseits zur Präcisirung der mechanischen Grundbegriffe beigetragen haben, wie schon das erste Differential in letzter Instanz durch das mechanische Motiv hervorgebracht wurde.

Dies ist klar ausgesprochen in der Responsio ad nonnullas difficultates a Dm. Bernardo Niewentiit circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas.[1]) Niewentiit hatte in dritter Stelle die Differentialien höheren Grades bestritten. Dagegen sagt Leibniz: Et in ipsa Geometria quantitates ordinariae sunt pro vulgari Algebra, differientales primi gradus referuntur ad tangentes seu linearum directiones, sed differentiales ulterioris gradus ad oscula seu linearum curvedines.... Sed cum ubique curva directionis suae inclinationem mutet (alioqui non curva, sed recta foret) etiam anguli continue, licet insensibiliter seu per discrimina incomparabiliter parva mutantur.[2])

An Wallis hatte Leibniz geschrieben: Unde jam mirum non est, Problemata quaedam post receptum calculum meum soluta haberi, quae antea vix sperabantur: ea praesertim quae ad transitum pertinent a Geometria ad naturam. Und Wallis antwortet: Atque hinc statim colligitur, cujuscunque curvae quodvis punctum eam habere Directionem, Obliquitatem, Inclinationem (et quae sunt hujusmodi) quae est Rectae

[1]) Acta Erudit. 1695. — [2]) Math. Schriften, Bd. V, p. 326.

ibidem Tangentis, potestque propterea considerari ut Pars Infinitesima istius Rectae.[1])

In der „Additio ad hoc Schediasma" heisst es: Quod si solae darentur differentiae primae, sequeretur, omnes ordinatas crescere uniformiter, seu omnem lineam esse rectam. Interdum autem, continuando aliquousque differentiationes, tandem finiendum est, cum nimirum linea differentiarum repraesentatrix, secunda vel tertia vel alia ulterior fit recta .... Ex his jam intelligitur, calculum differentialem posse concipi tamquam si fieret nonnisi in quantitatibus ordinariis, tametsi origo ex inassignabilibus petenda sit, ut abjectionum seu destructionum ratio reddatur. Hier sind also qualitative Unterschiede in geometrischen Verhältnissen als die Beispiele und Repräsentanten der Ordnungen des Unendlichkleinen bezeichnet, wogegen der Journal-Artikel vom Jahre 1701[2]) einen entschiedenen Rückfall in die populäre Connivenz bildet; denn in jener nicht ganz eine Seite füllenden Notiz wird die öfter sich wiederholende quantitative Vergleichung angestellt: dass es sich um relative Unterschiede bei der Unterscheidung des Endlichen und Unendlichen handele, wie die Distanz der Fixsterne im Verhältniss zum Durchmesser einer Kugel. Damit aber wird der originale, positive Charakter seines Begriffs von Leibniz selbst aufgegeben: de sorte qu'on ne diffère du stile d'Archimède que dans les expressions. Ebenso an Bodenhausen: Unsere calculos infinitesimales ad demonstrationes rigorosas zu bringen .., bestehet nämlich in der gemeinen Geometria, nur dass man in unserem calculo auslässet, was in der Construction inconsiderabel ... denn man kann allezeit wissen, dass solches elidendum minus quovis dato more Archimedeo."[3])

Nach dem Ausbruch des Prioritätsstreites hingegen weiss er die eigenthümliche Bedeutung seines Princips ganz anders zu beleuchten. In der aus dem Hannoverschen Manuscript herausgegebenen Historia et origo calculi differentialis sagt er: Observabat autem lineas infinite parvas in figuris occurrentes nihil aliud esse quam differentias momentaneas linearum variantium. Et quemadmodum quantitates hactenus consideratae simpliciter apud Analystas habuerant suas functiones, nempe

---

[1]) Math. Schriften, Bd. IV. p. 27, 30. — [2]) ib. Bd. V. p. 350. — [3]) ib. Bd. VII. p. 391.

potentias et radices, ita jam quantitates ut variantes habere novas functiones, nempe differentias. Et ut habuimus hactenus x, xx, x^3 etc y, yy, y^3 etc, ita posse adhiberi dx, ddx, d^3x etc dy, ddy, d^3y etc ... animumque[1]) a continua ad figuras intentione liberari. Et in applicatione Calculi differentialis ad Geometriam, differentiationes primi gradus nihil aliud esse quam inventiones tangentium, differentiationes secundi gradus esse inventiones osculantium ... et ita porro procedi posse.[2])

Gegen Newton aber macht er in diesem Zusammenhange das Verbleiben bei der Exhaustions-Methode geltend, von welcher sein Calcul weit verschieden sei. Quae enim sub aenigmate dixerat et tandem explicuit (sc. aemulus), de Fluxionibus et Fluentibus loquuntur, id est de quantitatibus finitis et eorum elementis infinite parvis, sed quomodo unum ex alio derivandum sit, nec minimum adjumentum praebent. Et dum ille rationes nascentes aut evanescentes considerat, prorsus a differentiali calculo abduxit ad methodum exhaustionum, quae longe diversa est ... nec per infinite parvas, sed ordinarias procedit, etsi in illis desinat.[3]) Hier also tadelt er — und es bleibe vorerst dahingestellt, ob mit Recht — an Newton: dass nach dessen Fluxions-Methode die Ableitung des Endlichen aus dem Unendlichen nicht nachgewiesen werde. Dies aber ist der volle und reine Zweck des Unendlichen. In einer Abhandlung ferner, in welcher er eine Logica Mathematica geben will, unter dem Titel Mathesis Universalis aus dem Manuscript zu Hannover herausgegeben, bestimmt er die beiden Theile dieser allgemeinen Mathematik. Duasque habet partes: scientiam finiti ... et scientiam infiniti, ubi interventu infiniti finitum determinatur.[4]) Diese Bestimmung des Endlichen durch das Unendliche, so dass das Unendliche als das bestimmende zum erzeugenden Princip wird, vereinigt die geometrische Bedeutung des Differentials mit der mechanischen.

57.a Die mechanische Bedeutung der Differentialien. — In der bereits oben (S. 64) angeführten Entgegnung auf die Einwürfe Niewentiit's sagt Leibniz: Sed et harum diffe-

[1]) V. 393 dafür: imaginatio. — [2]) Math. Schriften, Bd. V. p. 408. — [3]) ib. p. 409 f. — [4]) ib. Bd. VII. p. 53.

rentiationum successivarum veritas (sonst auch realitas) ususque rebus ipsis confirmatur. Nempe ut jam alias notare memini, quantitas ordinaria, quantitas infinitesima prima seu differentialis, et quantitas differentio-differentialis vel infinitesima secunda, sese habent ut motus et celeritas et sollicitatio, quae est elementum celeritatis. Motu describitur linea, velocitate elementum lineae, sollicitatione (velut initio descensus a gravitate, vel motus a conatu centrifugo) elementum elementi.[1]) Ausgeführter noch und bestimmter wird diese mechanische Bedeutung der höheren Differentialien in dem Tentamen de motuum coelestium causis, welches in erster Bearbeitung in den Acta Erudit. 1689 erschienen war, in zweiter Bearbeitung aus dem Manuscript zu Hannover herausgegeben ist. Et possunt adhiberi ... quae usum habent maximum, item in omni pene translatione Geometriae ad naturam, nam si motus exponatur per lineam communem, ... impetus seu velocitas exponetur per lineam infinite parvam, et ipsum elementum velocitatis, quale est gravitatis sollicitatio per lineam infinities infinite parvam. Atque haec Lemmatum loco adnotanda duxi pro Methodo nostra quantitatum incomparabilium et Analysi infinitorum tanquam Doctrinae hujus novae Elementa.[2]) Mit ausdrücklicher Bezugnahme auf Galilei findet sich die Präcisirung der dynamischen Grundbegriffe durch den neuen Calcul im Specimen dynamicum pro admirandis Naturae Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis (Pars I, Acta Erudit. 1695; Pars II, Manuscript zu Hannover). Während der conatus sonst, auch noch im Jahre 1693 gleichbedeutend mit sollicitatio gebraucht wird[3]), schliesst der conatus hier, und zwar unter Berufung auf Descartes[4]), die Richtung ein, und wird desshalb gleichbedeutend mit Kraft, insbesondere der derivativen.[5]) Velocitas sumta cum directione Conatus appellatur; Impetus autem est factum ex mole corporis in velocitatem. ... Quin etiam quemadmodum ... ab accessu jam facto faciendove distinguere possumus accessionem quae nunc fit, tanquam incrementum accessus vel elementum ... ita possemus praesentaneum seu instantaneum motus elementum ab ipso motu

[1]) Math. Schriften, Bd. V. p. 325. — [2]) ib. Bd. VI. p. 168. — [3]) Vgl. ib. Bd. VI. p. 234. — [4]) ib. p. 239. — [5]) Vgl. Gerhardts Einleitung VI. p. 13.

per temporis tractum diffuso discernere et appellare Motionem.[1]) Ausdrücklicher: si ex continue crescente faciamus scalarem per infinitesimales.[2]) Und in einem Briefe an Schulenburg 1698: Et compertum est, non alia melius ratione aperiri aditum a Geometria ad Naturam,[3]) quae per infinitos gradus intermedios in omni mutatione, ut ego arbitor, progrediens characterem habet Autoris infiniti.[4])

58. Das Intensive und Inextensive. — Bekannter und öfter ausgeführt sind die Vermittelungen, welche die Arithmetik und Algebra und die Entdeckungen, die Leibniz in diesen Disciplinen machte, für seinen Differentialbegriff bilden: Wenn wir nun aber alle diese prädisponirenden Erwägungen in Ein Wort zusammenfassen dürfen, in welchem die Motive des Unendlichkleinen sich verdichten, so ist auch für Leibniz derjenige Begriff zu nennen, dem wir schon bei Galilei in dieser Richtung begegnet sind. Der Begriff des Intensiven und zwar zunächst in der Bedeutung des Inextensiven bringt diese fundamentale Erweiterung in den Zahlbegriff. Das Intensive ist die nächste Frucht des Princips der Continuität. So lange der Uebergang von Punkt zu Punkt, von Einheit zu Einheit nur negativ nicht als Sprung vorgestellt wird, so lange genügt die Methode der Grenzen, welche den Begriff der anschaulichen Extension principiell nicht ausschliesst. Fassen wir aber die Infinitesimalmethode in ihrer principiellen Strenge, als Entfaltung des Stetigkeitsprincips, so ist die Ueberwindung der auf der Extension beruhenden Grösse damit vollzogen. Denn die Continuität beruht nicht auf der Raum-Anschauung, sondern ist eine allgemeinere Voraussetzuug des Bewusstseins, welche für die Abstraction des Denkens geltend zu machen, und welche als solche in die Bedingungen der Anschauung zur erhöhten Reinigung derselben einzuführen ist.

Der Charakter der Anschauung ist die reine Gegebenheit (25), also die conditio sine qua non für allen Anfang der Objectivirung. Aber der nächste Schritt für dieselbe muss die

---

[1]) Math. Schriften VI, p. 237. Ueber den Terminus Motio in seiner Bedeutung für den Begriff der Bewegungsgrösse vgl. Johann Bernoulli an Leibniz III, 188.

[2]) VI. 259. Der Terminus infinitesimalis rührt von Nicolaus Mercator her (IV. p. 63).

[3]) Vgl. an Wallis (IV. p. 27), oben S. 64. — [4]) ib. VII. p. 240.

Voraussetzung eines realisirenden Princips sein. So entsteht für diesen von der sich begründenden mathematischen Naturwissenschaft gesuchten Geltungswerth der Realität das Infinitesimale; aber wir haben gesehen, wie diese Realität mit dem Verdachte und Vorurtheil der idealen Fiction zu kämpfen hat. Dieses Vorurtheil hängt an der Vergleichungsgrösse der Extension, die in ihrer willkürlichen Einheit wie in ihrem Coordinaten-Ursprung auf Convention und sinnlicher Relativität gegründet scheint; es kann daher auch nur durch eine Festsetzung entwurzelt werden, welche jene mit der Relativität behaftete Extension aufgiebt und die Voraussetzung eines alle Extension erzeugenden Inextensiven in die reine Gegebenheit des Raumes und der Zeit einpflanzt. Damit ist eine absolute Position gewonnen, mit welcher die Realität der Gegenstände wissenschaftlicher Erfahrung positiv begründet wird. Wir sehen öfter bei Leibniz, wie er physice id est geometrice et realiter sagt; und wollen nunmehr an einigen Anführungen zeigen, dass diese im Differential bewirkte Realisirung durch Vermittelung des Intensiven erfolgt.

In der bereits citirten Theoria motus abstracti heisst es in den fundamenta praedemonstrabilia: 4. Dantur indivisibilia seu inextensa. 5. Punctum non est cujus pars nulla est, nec cujus pars non consideratur; sed cujus extensio nulla est, seu cujus partes sunt indistantes, cujus magnitudo est inconsiderabilis, inassignabilis ... atque hoc est fundamentum Methodi Cavallerianae, quo ejus veritas evidenter demonstratur, ut cogitentur quaedam ut sic dicam rudimenta seu initia linearum figurarumque qualibet dabili minora.[1]) Wir haben gesehen, dass nicht Alle in dieser erschöpften Extension das Fundament der Methodus Indivisibilium erkannt haben, und es ist vielmehr diese Auffassung ein Symptom der keimenden eigenen Ansicht.

Ebenda 18. Punctum puncto, conatus conatu major est, instans vero instanti aequale ... Unde arcus inassignabilis circuli majoris major est, quam minoris; et linea quaelibet, ducta a centro ad circumferentiam ... est sector minimus perpetuo crescens, sed intra inextensionem. Es seien dadurch die Argumente der Skeptiker widerlegt. Tota de angulis doctrina est de quantitatibus

[1]) Math. Schriften, Bd. VI. p. 68.

inextensorum.[1]) In dem Usus überschriebenen Schluss dieser Abhandlung werden die idealistischen Consequenzen dieses die alleinige Autorität der sinnlichen Anschauung ablehnenden Grundsatzes ausgeführt, auch historisch, im Verhältniss besonders zu Hobbes, Descartes, Gassendi und Galilei, und sachlich durch Einschränkung des Forums der Sinnlichkeit. Sensus enim dijudicare non potest, corpus aliquod unum continuum contiguumve sit, an multorum discontiguorum hiantium acervus.[1])

Das Specimen dynamicum, dessen erster Theil in den Acta Erudit. 1695 erschienen ist, beginnt nach wenigen einleitenden Worten mit dem Satze: In rebus corporeis esse aliquid praeter extensionem, imo extensione prius, alibi admonuimus, nempe ipsam vim naturae ubique ab Autore inditam, quae non in simplici facultate consistit, qua Scholae contentae fuisse videntur, sed praeterea conatu sive nisu instruitur.... Hic nisus passim sensibus occurrit, et meo judicio ubique in materia ratione intelligitur, etiam ubi sensui non patet ... Certe oportet ut vis illa ... intimam corporum naturam constituat.... nihilque adeo in ipso (sc. motu) reale est, quam momentaneum illud quod in vi ad mutationem nitente constitui debet. Huc igitur redit, quicquid est in natura corporea praeter Geometriae objectum seu extensionem.[3]) Dieses Inextensum constituirt die Intensio.

Wie Galilei bezeichnet daher auch Leibniz die Geschwindigkeit als intensio, indem er die diffusio actionis in motu vel actionis extensio unterscheidet von der intensio ejusdem actionis, welche die quantitas velocitatis sei.[4]) In dem Manuscript de Ortu, progressu et natura Algebrae, welches nicht zum mindesten an das Lessing'sche Wort erinnert, entwirft Leibniz nach lichtvollen Erörterungen über das Verhältniss der Algebra zur Geometrie, wie auch zur Logik, eine kurze Geschichte und sagt hierbei: Scholastici quidam maxime Angli moliti sunt singulares quosdam calculos admodum subtiles circa intensiones ac remissiones qualitatum et formarum, viresque ac motus, quos miror plane fuisse neglectos, at ne quidem celeberrimus Wallisius licet ipse Anglus in sua Algebraicarum rerum historia

---

[1]) Math. Schriften, Bd. VI. p. 70. — [2]) ib. 77. — [3]) ib. 235. — Dynamica, Manuscript, VI. p. 355. Intensio motus seu vigor (ib. 399).

eorum meminerit, cum tamen subsit aliquid solidi et specimen praebeatur quasi Metaphysicae cujusdam Mathematicae.[1]) Indessen hat Wallis in diesem Sinn und Sprachgebrauch seine Erklärung des Infinitesimalbegriffs in einem Briefe an Leibniz selbst geschrieben. Porro .. hanc dico Mensuram esse Curvedinis, intensive consideratae ... Quemadmodum vero Peripheriae punctum quodvis aliam atque aliam habere censeatur Directionem, sic in curvis Dissimilaribus alia atque alia est in singulis punctis intensiva curvitas, seu gradus Curvedinis aut Flexionis: atque ut illa aestimanda est ex Recta Tangente, sic haec ex Circulo ibidem Exosculante .... Hinc ortum ducat tuus Calculus Differentialis, et Newtoni Methodus Fluxionum, si ego utramque methodum recte intelligo.[2]) Aber freilich hat Wallis in seiner Arithmetica Infinitorum nichtsdestoweniger das in seiner Terminologie dem dx entsprechende a als nihil seu evanescens gedacht, während es nach Leibniz infinite-exiguum sei.[3]) Indessen erkennt er doch selbst an dem minutum triangulum differentiale jenen abstracten Grössen-Charakter desselben. Quippe quo retinetur Species Trianguli, sed abstracta a Magnitudine, hoc est Triangulum hujusce Formae, sed nullius determinatae Magnitudinis.[4])

Leibniz hingegen antwortet ihm[5]) am 29. December 1698: Quod Calculum differentialem attinet, fateor multa ei esse communia cum iis quae et Tibi, et Fermatio aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata.... Putem praestare, ut Elementa vel differentialia momentanea considerentur velut quantitates more meo quam ut pro nihilis habeantur. Nam et ipsae rursus suas habent differentias et possunt etiam per lineas assignabiles proportionales repraesentari. Und in Bezug auf jene Species trianguli sagt Leibniz: nescio an intelligi possit, certe obscuritatem non necessariam indicere videtur. Figuram sine magnitudine quis agnoscat? Nec video quomodo hinc auferri possit magnitudo.... Wallis verbessert sich in seiner Antwort und bestimmt den charakteristischen Ausdruck genauer also: Quod dixi de retenta Specie Trianguli abstracta a Magnitudine, non id intellectum velim, quasi Triangulum vellem quod Magnitudinem non habeat, sed quod considerari

---

[1]) Math. Schriften, Bd. VII. p. 210. — [2]) ib. Bd. IV. p. 31. — [3]) ib. p. 37. — [4]) ib. p. 50. — [5]) ib. p. 54.

possit Species seu Forma Trianguli abstracta a Magnitudine, hoc est, non considerata magnitudine ... quippe hoc est abstrahere. Si vero non placeat ut dicatur Species Trianguli, dicas licet Gradum Inclinationis seu Declivitatis curvae in puncto contactus.

Mit dieser Anerkennung des Grades ist das dx als Grösse, nämlich als diejenige neue Art von Grösse anerkannt, von der die Alten zwar die Ahnung hatten, aber keine Bestimmung zu treffen vermochten: als die im Intensiven beruhende, durch das Inextensive vermittelte Grösse. Itaque non tantum lineas infinite parvas, ut dx, dy, pro quantitatibus veris in suo genere assumo, sed et eorum quadrata vel rectangula dxdx, dydy, dxdy, idemque de curvis aliisque altioribus sentio, praesertim cum eas ad ratiocinandum inveniendumque utiles reperiam.[1]) So wird durch die Behauptung der quantitas vera in suo genere der hauptsächliche Charakter des Unendlichkleinen, das entscheidende Merkmal des Differentialbegriffs gewahrt: die Ordnung der höheren Differentialien.

59. Die Rechnung mit den Differentialien. — Wer die Möglichkeit, die Nothwendigkeit höherer Differentiation nicht klar begreift, der hat den Begriff des Differentials, die Wurzel seiner Bedeutung nicht erfasst. Leibniz selbst wundert sich, grade wegen des offenbaren Nutzens der höheren Differentialien über den Anstoss, den man an ihnen nehmen mag. So schreibt er an De l'Hôpital 1695 über Niewentiit's Einwürfe: Or il serait estrange de dire que x et dx sont des grandeurs, et que leur troisième proportionelle ddx ne le soit point, outre l'utilité des differentio-differentielles, tant aux osculations qu'ailleurs, que l'effect même a fait connoistre.[2]) Durch die höheren Differentialien erweist sich erst die Fruchtbarkeit des Differentialbegriffs nach seiner mechanischen Bedeutung. Denn wenn Leibniz kraft derselben die Atomhypothese verwerfen und verhöhnen konnte — dans l'hypothèse des atomes l'attouchement fait l'office d'un glouten — so ist dies eben nur durch die Möglichkeit intimerer Zusammenhänge erklärbar, welche sein Grundbegriff darbot und sicherte: il semble que contactus osculi devrait donner plus de connexion que simplex con-

[1]) Math. Schriften, Bd. V. p. 322. — [2]) ib. Bd. II. p. 288.

tactus.[1]) Diese tiefere Connexion liegt in dem höheren Differential. Wenn daher das erste Differential die Geschwindigkeit bedeutet, so muss das zweite die Beschleunigung zu bedeuten haben: zum Realisiren ist das erste ersonnen, also muss es im höheren Differential zur fernern Realisirung gebracht werden, mit demselben Fug, mit dem das erste vorausgesetzt wurde.

Indessen scheint dies der Widerspruch in dem Verfahren selbst zu sein, dass ich in der ersten Differentiation die höheren Differentialien vernachlässigen darf, von denen doch nicht nur die principielle Bedeutung anerkannt wird, sondern die in dem fortgesetzten Verfahren ermittelt und aufgestellt werden. Auch diese Schwierigkeit hebt Leibniz selbst in einem Briefe an Wallis: Sed cum descenditur ad secundam differentiationem, tunc etiam rectangula illa ex assignabili et elementari evanescunt supersuntque rectangula ex duabus elementaribus, et quae (quod memorabile est) his homogenea facta ex assignabili ductu in differentio-differentialem. Nihil ergo a nobis negligitur nisi in loco, nec quicquam aliud pro nihilo ducitur, nisi comparate. Nec alio indigemus postulato. Itaque $ddxy$ est $2dxdy + xddy + yddx$. Qui calculus ad oscula aliaque id genus innumera usum habet. Simplicius, fateor, est quod ais, nihili multiplum esse nihilum, sed usum quem nos proponimus non habet. Und darauf folgt ein Satz: Verae interim an fictitiae sint quantitates inassignabiles, non disputo.... Aber dieser ganze in der bekannten Argumentation ausgeführte Satz ist eingeklammert, „wahrscheinlich“ um in der Abschrift weggelassen zu werden.[2])

Die höheren Glieder werden mithin in der ersten Differentiation vernachlässigt, weil sie der Tendenz derselben nicht angehören, weil sie Realitätsstufen repräsentiren, auf deren Festsetzung die erste Differentiation nicht ausgeht. Wenn dagegen jene complicirteren Realitäten in Frage kommen können, so gilt es zu erkennen, dass dieselben in dem variabeln Charakter der ersten Intensitäts-Annahme enthalten sein müssen. Die universelle Natur der Continuität gilt nicht minder für die Thatsache des Unendlichkleinen wie für dessen Erzeugung.

---

[1]) An Hugens 1693; II, p. 157, 158. Vgl. Johann Bernoulli an Leibniz, III. p. 188: certo destruitur unico ictu Atomistarum opinio.

[2]) Math. Schriften, Bd. IV. p. 63.

Porro ddx est elementum elementi seu differentia differentiarum, nam ipsa quantitas dx non semper constans est, sed plerunque rursus (continue) crescit aut decrescit. Et similiter procedi potest ad dddx seu d^3x, et ita porro; imo potest occurrere $d^e x$, cum exponens differentiae est indeterminatus.[1])

Wenn man die Realitäts-Bedeutung des Differentials erkannt hat, so kann die Frage keine ernstliche Schwierigkeit bilden, ob das dx selbst continuirlich oder discret sei. Es ist discret innerhalb der zum Behuf einer fraglichen Realisirung angestellten Differentiations-Ordnung. Denn nur durch eine angenommene Discretion kann das Continuum, das will sagen, eine dem Gesetze der Continuität entsprechende Function vermessen und bestimmt werden. Nichtsdestoweniger aber bleibt auch diese für ihre Realisirungsstufe zureichende Discretheit dem Princip der Continuität zugehörig, welches, sofern andere Realitäten in Frage kommen, diesen Interessen der höheren Differentiation zu genügen hat, und zu genügen vermag. Schon in der Publication vom Jahre 1786 heisst es: Antequam finiam, illud adhuc admoneo, ne quis in aequationibus differentialibus, qualis paulo ante erat $a = \int dx : \sqrt{1 - xx}$, ipsam dx temere negligat, quia in casu illo ... negligi potest: nam in hoc ipso peccarunt plerique et sibi viam ad ulteriora praeclusere, quod indivisibilibus istiusmodi, velut dx, universalitatem suam (ut scilicet progressio ipsarum x assumi posset qualiscunque) non reliquerunt, cum tamen ex hoc uno innumerabiles figurarum transfigurationes et aequipotentiae oriantur.[2]) An den Freiherrn von Bodenhausen[3]): Es ist gantz nicht nöthig ad summandum, dass die dx oder dy constantes und die $ddx = 0$ seyen, sondern man assumiret die progression der x oder y .... wie man es gut findet. Und das ist eben auch eines der avantagen meines calculi differentialis, dass ...

60. Das Unendlichkleine und das Ich. — So sehen wir den positiven, in dem Begriffe des Differentials liegenden Grund, dessentwegen Leibniz die Gleichsetzung von dx mit der Null ablehnt. Von Grandi hat er den Ausdruck des nihil respectivum acceptirt. Interea infinitę parva concipimus

[1]) Math. Schriften, Bd. VII. p. 223. — [2]) ib. Bd. V. p. 233. — [3]) ib. Bd. VII. p. 387, Ms.

non ut nihila simpliciter et absolute, sed ut nihila respectiva (ut ipse bene notas), id est ut evanescentia quidem in nihilum, retinentia tamen characterem ejus quod evanescit. Talia ducta in quantitatem infinitam etiam modificatam concipimus producere quantitatem ordinariam. Nec ineleganter hinc a te illustratur Creationis negotium, ubi vis infinita absoluta ex nihilo absoluto aliquid facit. Equidem infinitae numero (id est quovis numero plures) magnitudines nunquam componunt unum totum infinitum, et infinitudo vera non cadit nisi in infinitum virtutis, omni parte carens ... et quantitates illae calculi nostri extraordinariae sunt fictiones, non ideo tamen spernendae sunt ... cum in calculo perinde sit ac si essent verae quantitates, habeantque fundamentum in re et veritatem quandam idealem ut radices imaginariae.... Nec sine jactura philosophiae has subtilitates, et hanc ut sic dicam metaphysicam Geometriae (quam Caramuel Metageometriam vocaret) ignorarunt Philosophi Scholastici.[1])

Wir sehen auch hier das Inextensive geltend gemacht für die in der „idealen Wahrheit" bestehende wahre Quantität: die infinitudo vera liegt in demjenigen infinitum, welches ist omni parte carens. Die numerisch unendlichen Grössen können nicht ein unum totum infinitum ergeben. In gleicher Weise spricht sich Leibniz in seinen an philosophischen Erörterungen überaus reichen Briefen an Johann Bernoulli aus. Sunt ista in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etsi in materiae partibus non sint.... Reale infinitum fortasse est ipsum absolutum, quod non ex partibus conflatur, sed partes habentia eminenti ratione et velut gradu perfectionis comprehendit.[2]) So sehen wir überall den Nerv des Argumentes in dem mechanischen Princip des Intensiven und zwar zunächst in der Bedeutung des Inextensiven. Et revera puncta concipio, non ut elementa lineae, sed ut limites seu negationes progressus ulterioris, sive ut lineae terminos.... Interim ipsa principia Mechanismi seu Legum motus ex sola consideratione extensionis et impenetrabilitatis non posse derivari; itaque aliud quid in corpore esse statuendum,

[1]) An Grandi v. 6. September 1713; IV. p. 218 f.
[2]) Vom 7. Juni 1698; III. p. 499 f.

cujus modificatione oriantur conatus et impetus, uti modificatione extensionis oriuntur figurae. Per monadem intelligo subsantiam vere unam, quae scilicet non sit aggregatum substantiarum. Eine solche Substanz sei nicht die materia prima oder moles, noch die materia secunda oder massa. Sed si nullae essent animae, vel his analoga, tunc nullum esset Ego, nullae monades, nullae reales unitates, nullaeque adeo multitudines substantiales forent; imo omnia in corporibus non nisi phantasmata essent.[1]) So erkennen wir in dem inextensiv-intensiven Merkmal des Unendlichen das gesammte System der Monadologie gegründet.

Und wir bemerken zugleich an dieser denkwürdigen Stelle, wie an dem Begriffe des Unendlichkleinen das Problem des Ich hängt, in ihm enthalten ist. Somit können wir an diesem historischen Punkte den Zusammenhang uns vergegenwärtigen, in welchen bei Kant die intensive Grösse und die Realität der Empfindung gestellt sind. Es giebt in der That keinen intimeren Zusammenhang als zwischen dem sogenannten realen Gegenstande und der Empfindungs-Einheit. Denn wenn es nicht die in dem intensiven Unendlichkleinen begründete Realität gäbe, so wäre und bliebe die Empfindung lediglich subjectiv, und es gäbe kein Mittel, ein apriorisches, ein sachliches, reales Element in ihr zu objectiviren. Das sagt Leibniz: es gäbe nur phantasmata. Aber andererseits giebt es kein energischeres Beispiel für die gesuchte Realität, als die Empfindung. Denn liegt nicht alle Realität in dem Bewusstsein? Wo anders ist die Materie, die Bewegung, die Kraft, die Natur? Wo anders auch deren universales Gesetz, das Gesetz der Continuität? Wir können daher bei dieser historischen Anknüpfung vorausbemerken, dass das Reale überhaupt auch als das Reale der Empfindung gedacht werden kann; dass der Gegenstand, sofern er realisirt gedacht wird, in einer Voraussetzung realisirt werden muss, welche zugleich die Realitätsforderung der Empfindung befriedigt, die Realisirung des Bewusstseins vollzieht.

So sehen wir von Leibniz selbst das Unendlichkleine mit seiner systematischen Weltansicht verknüpft, und nach deren Beziehungen die Fruchtbarkeit dieses Grundgedankens,

---

[1]) Math. Schr.; III. p. 536 f.

wennzwar nicht ausgemessen, so doch mit den treffenden Geltungswerthen bezeichnet. Nur Eines möchte an seiner gesammten Darlegung, wie solche von Gegnern und Anhängern herausgefordert wurde, auszusetzen sein: der Terminus des Differentials selbst.

61. Uebergang zu Newton. — Es ist von Allen, die Leibnizens Methode dargestellt haben, vorzugsweise ausgeführt worden, dass er zu derselben durch seine Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahlen geführt worden sei: wie er bei Boyle den Mathematiker Pell traf, und als er erzählte, dass er eine Methode besitze, Zahlreihen mit Hülfe ihrer Differenzen zu summiren, von diesem auf Mouton und Mercator hingewiesen wurde. So kommt Leibniz sehr früh von den Zahlen auf den neuen Zahlbegriff. Es ist jedoch belehrend zu bemerken, wie Leibniz in seinen ersten bezüglichen Niederschriften, welche vornehmlich von den Zahl-Problemen geleitet sind, der methodisch-begrifflichen Schwierigkeiten noch nicht Herr geworden war: dass es dazu eben unumgänglich der mechanischen Voraussetzungen bedurfte. In dem Manuscript vom 29. October 1675, in welchem zuerst die Bezeichnungsweisen sowohl dx wie $\int$ sich finden, herrscht doch noch die Vorstellung, dass dx eine Constante werde. „Die ganze Untersuchung bleibt unberührt von der Frage, als was für Grössen und von welcher Beschaffenheit die dx und die dy zu betrachten sind.“ [1]) Und in der Anmerkung sagt derselbe Autor: „dass Leibniz sie als gewöhnliche Grössen auffasst, geht aus seiner Bemerkung hervor: Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas x proximas“.

Dieses Merkmal, diese Erbschaft des Zahl-Charakters beeinträchtigt, verdunkelt die positive, realisirende Bedeutung des Unendlichkleinen. Leibniz hat diese erzeugende Kraft seines Begriffs genugsam hervorgehoben; aber er mochte andererseits den Vortheil nicht verschmähen, der für die öffentliche Meinung in der Einerleiheit seines Verfahrens mit der Grenz-Methode lag; und so hat er sehr häufig auf diesen Einklang mit dem stilus Archimedeus hingewiesen: als ob das Differential nichts Bestimmteres zu besagen hätte, denn die Grenze der Differenzen.

---

[1]) Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis, p. 60.

62. Die Fluxion. — Dieser Ansicht der Dinge tritt der Terminus entgegen, den Newton aufgestellt, mit welchem er sein in Tendenz und Regeln gleiches Verfahren erdacht hat. Aber freilich müssen wir, wenn wir somit Newton's Begriffe als Ergänzungen, Erhellungen und Berichtigungen betrachten, von der ebenso ängstlichen Art absehen, mit welcher auch Newton an die Methode der Alten sich anklammert: so dass er seine neue Entdeckung seinem Hauptwerke nicht breit und sicher zu Grunde legt, sondern nur an Einer Stelle kurz erwähnt, für die eigentliche Entwickelung seiner Demonstrationen hingegen es beim Alten bewenden lässt. Nichtsdestoweniger hat er doch den Begriff des Indivisibile durch den der Fluxion vertieft. Wir haben nun zu zeigen, dass auch hier der Realitäts-Gedanke das treibende Motiv ist; und dabei zugleich, dass in dieser terminologischen Fassung des Problems die störenden arithmetischen Nebengedanken des Differential-Ausdrucks beseitigt werden. Mit dem Terminus der Fluxion wird in dem Increment der fictive Charakter der Zahl überwunden, dagegen das Erzeugende, Realisirende, welches in der desshalb unvermeidlichen Annahme eines absoluten Punktes der Bewegung, des Momentes liegt, hervorgehoben und als das Princip der neuen Methode fixirt.

In der Sache und Tendenz haben wir demnach zwischen Leibniz und Newton volle Einigkeit zu constatiren. Der realisirende Charakter der Fluxion ist durch die Betrachtungsweise seines Lehrers Barrow eingeleitet. Barrow hat, wie wir oben (46) gesehen haben, den schon bei Cavalleri vorhandenen, besonders von Kepler und Galilei verwertheten Gedanken der Bewegung für die Ausmessung der Curven geltend gemacht. Newton ging von vornherein auf die systematische Verfassung der Bewegungsgesetze aus; er war sich bewusst, in diesen und nur in ihnen, mit Vermeidung aller verborgenen Qualitäten und Hypothesen, die echten Kräfte und das wirkliche Sein der Natur bestimmen zu können. Ihm musste daher der Hilfsbegriff der Bewegung für das geometrische Problem als der fundamentale und universelle Natur-Begriff sich darstellen. Diesen Zusammenhang scheinen diejenigen nicht zu beachten, welche das Hereinziehen der Bewegung ihm zum Vorwurf machen.

Die Bewegung aber, in dieser Beziehung auf die Dinge und Grössen gedacht, zieht sich auf die allgemeinen Weisen des

Bewusstseins zurück, die unter dem Namen von Raum und Zeit seit der ältesten griechischen Speculation ausgezeichnet sind. Wir sahen nun schon bei Galilei, wie die Fallräume in und aus den Geschwindigkeiten erzeugt werden, somit also Raum aus Zeit entsteht. Das ist der eminent idealistische Zug der Fluxions-Methode: dass sie die Raumgrösse aus der Zeitgrösse ableitet. In dieser Richtung des Gedankens entsteht die Fluxion, welche die Fluente erzeugt, und somit den realisirenden Charakter des Unendlichkleinen schon in der Prägnanz des Terminus bethätigt.

63. Das Moment. — Die nächste Vermittelung zu dieser Betrachtungsweise bildet der Begriff des Moment, welcher in der ersten und ältesten hierauf bezüglichen Abhandlung Newtons als bekannt und desshalb ohne Definition eingeführt wird, nämlich in der 1669 verfassten, 1711 veröffentlichten Schrift: De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.[1]) Hier wo der Ausdruck der Fluxion noch nicht gebraucht wird, bezieht sich Newton ausdrücklich auf die Methoden des Untheilbaren. Und es ist charakteristisch, dass er das Moment als Einheit bezeichnet, damit aber als ein je nach der Verschiedenheit der Aufgabe verschiedenes Massprincip. Sed notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est Superficies cum de Solidis, et Linea cum de Superficiebus, et Punctum cum de Lineis ... agitur. Nec vereor loqui de unitate in Punctis, sive Lineis infinite parvis, siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometrae, dum utuntur Methodis Indivisibilium.[2])

Dieser seiner Analysis erkennt er dieselbe Gewissheit zu, wie die der vulgären eingeräumte. Ut nihil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec Aequationes minus exactae; licet omnes earum Terminos nos homines et rationis finitae nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus.[3]) Der Ausdruck des Desiderates von Grössen, welches aus jenen Gleichungen entspringt, bezeichnet ebenso wie das Moment den Geltungswerth der Voraussetzung.

---

[1]) Vgl. Gerhardt, Entdeckung der höheren Analysis, S. 80.
[2]) Opusc. I. p. 19. — [3]) ib. p. 25.

Denn momentum bedeutet die in der Zeiteinheit durch die Bewegung beschriebene Grösse. Demnach verfährt Newton ebenso wie Barrow in seiner Tangenten-Methode: er schliesst aus den unendlichkleinen Veränderungen der durch die Bewegung hervorgebrachten Grösse auf die Grösse selbst.[1])

64. Fluxion und Fluente. — Die zweite hierhergehörige Schrift Newtons unter dem Titel Methodus fluxionum stammt aus dem Jahre 1671, ist aber erst nach seinem Tode, 1736 herausgegeben worden. In dieser Abhandlung entwickelt er den Begriff der Fluxion, den er, wie sein Anhänger Mac Laurin hervorhebt, Napier entlehnt hat. Their nature and genesis is proposed by the inventor in a method similar to that which is applied in this doctrine (sc. of fluxions) for explaining the genesis of quantities of all sorts, and is described by him almost in the same terms.[2]) In der That handelt es sich in der Methode der Fluxionen um nichts Anderes, als um die Erzeugung der Grössen. Und obschon Newton das schulmässige Philosophiren hier wie wenigstens ähnlich überall ablehnt, so ist doch seine Forschungsmethode selbst eine so gesunde und richtige — sagen wir besser die vorbildliche, dass wir Kant auch in dieser capitalen Einzel-Frage als Newtonianer erkennen müssen.

Nicht bloss nämlich den Raum setzt Newton in dogmatisch-empirischer Gegebenheit nicht voraus, sondern auch die Zeit nicht. Ebenso stellt er für die Betrachtung des Raumes den, wie wir heute sagen müssen, transscendentalen Gesichtspunkt auf: Hinc fit, ut in sequentibus considerem Quantitates tanquam genitas continuo Incremento, ut Spatium, quod Corpus aut quaelibet res mota describit.[3]) Denn wenngleich der Körper und die bewegte Sache hier noch als für sich gegeben und angenommen scheinen, so wird doch die ganze Untersuchung zu keinem andern Behufe angestellt, als um jene selbst erst zu objectiviren. Der Raum wird zum Zwecke solcher Begründung also als erzeugt betrachtet durch stetiges Wachsthum. Der Grund seiner exacten Grösse liegt demgemäss in der Stetigkeit des Incrementes. Das Wachsen aber und die Stetigkeit desselben setzt die Zeit voraus. Indessen auch die Zeit bezeichnet

---

[1]) Gerhardt, a. a. O. S. 82. — [2]) Treatise of Fluxions, 1742, I. p. 158. — [3]) Opusc. I. p. 54.

doch, wie wir sagen würden, nur die Art des Geschehens. Newton sagt: Tempus formaliter non considero. Das Geschehen aber fasst er unter dem für die Erzeugung der Grössen von Napier erfolgreich eingeführten Ausdruck des Fliessens. Und so wird an der Gesetzmässigkeit, deren das Fliessen theilhaft gemacht werden kann, die Reinheit und Exactheit der Begriffe Raum, Zeit und Grösse dargethan. Suppono, quod una ex propositis Quantitatibus homogenea cum aliis crescat aequabili Fluxu, ad quam ceterae, tanquam ad Tempus, referantur, quae ideo per Analogiam non inconcinne dici potest Tempus. Die Zeit selbst wird dargestellt an der Grösse, an welcher sie gemessen wird: aequabili Incremento vel Fluxu.

Demgemäss werden die zu unterscheidenden Arten von Grösse als Modificationen des Fliessens abgeleitet und bestimmt. Die gewöhnliche Raumgrösse wird, weil und sofern sie als in dem Fliessen gradatim et indefinite wachsend betrachtet wird, Fluens genannt und durch x, y, z bezeichnet. Jenes indefinite, stufenweise Wachsthum aber, das bezeichnen die Geschwindigkeiten, quibus singulae Fluentes augentur per Motum generantem; sie heissen desshalb Fluxiones, und werden durch $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ bezeichnet.

Man könnte nun meinen, dass durch die Fluxion das Unendlichkleine in seiner realisirenden Potenz erschöpft sei, dass damit der Galilei'sche Impetus wieder zu Ehren gekommen, und Alles, was Leibniz an intensiver Grösse aufbot, erreicht und gesichert sei. Denn die Geschwindigkeiten sind ja die Urbilder der Kraft, also die erzeugenden Grössen κατ' ἐξοχήν. Indessen liegt die Sache so klar und einfach bei Newton nicht, obschon sie ziemlich häufig so dargestellt wird, sogar bei Gerhardt.[1]) Vielmehr haftet doch die Vorstellung Newtons von der „erzeugenden Bewegung" und demzufolge von der Geschwindigkeit an dem durchmessenen Raume, also an dem Extensiven. Und um dieses geltend zu machen, kommt er auf denjenigen Begriff zurück, welcher ihm in der vorhergehenden Abhandlung die Fluxion noch ersetzen musste: das Moment. Fluentium Quantitatum Momenta (videlicet earum partes indefinite parvae, quarum accessione in indefinite exiguis partibus Temporum Quantitates ipsae jugiter augentur) sunt ut Velocitates,

[1]) Vgl. Entdeckung etc. S. 84.

quibus fluunt aut crescunt.[1]) Das Verhältniss der Momente ist gleich dem Verhältniss der Geschwindigkeiten. Aber das Moment ist doch ein Etwas ausser der Geschwindigkeit. Momentum alicujus (puta x) repraesentatur Facto ex ejus Celeritate $\dot{x}$ in Quantitatem indefinite parvam (id est, $\dot{x}o$).

Dadurch aber wird der realisirende Werth des Unendlichkleinen vereitelt, und seine ganze Bedeutung, seiner Bezeichnung durch 0 entsprechend, in die sonderbare Würdigkeit gesetzt: nachdem er bei der Operation seine Dienste gethan, verschwinden zu dürfen. Cum autem finxerimus 0 Quantitatem infinite parvam, ut exponere posset Quantitatum Momenta, Termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati; eos igitur nego.[2]) Freilich entweicht damit zugleich die Bedeutung, für welche in jener scheinbaren Null tiefere Realitätsquellen latent sind und in weiterem Verfahren zugänglich gemacht werden müssen. Die Anhänger Leibnizens haben, und das lässt sich wenigstens verstehen, gemeint, dass Newton in seinen ersten Arbeiten der Begriff der höheren Differentialien verschlossen geblieben sei. Und ein Lacroix sagt in seiner eine vortreffliche historische Skizze enthaltenden Vorrede zu seinem Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, „dass die Fluxionen eigentlich zu reden für Newton nichts waren, als ein Mittel, denen Grössen, welche er behandelte, ein in die Sinne fallendes Object zu geben".[3]) Seine wirkliche Methode sei vielmehr die der ersten und letzten Verhältnisse gewesen. Diese Ansicht wird, wie schon erwähnt, durch die Thatsache unterstützt, dass Newton nur an Einer Stelle seiner Principia die Fluxionstheorie kurz entwickelt, anstatt derselben hingegen „die Methode der ersten und letzten Verhältnisse" der ganzen Darstellung seines Hauptwerkes zu Grunde legt. Denn der erste Abschnitt des ersten Buches trägt die Ueberschrift: De methodo Rationum primarum et ultimarum. Freilich wird dieses Argument durch die bekannte Vorliebe Newtons für die rein geometrische Darstellung geschwächt, sowie durch seine ausdrückliche Erklärung, auf die wir alsbald einzugehen haben.

65. Methode der ersten und letzten Verhältnisse. — Indessen unterscheidet sich die Methode der ersten und letzten

---

[1]) Opusc. I, p. 59. — [2]) ib. p. 60. — [3]) Uebersetzung von Grüson, I, XXXIV.

Verhältnisse an und für sich von der Methode der Grenzen dadurch, dass sie zugleich und vorzugsweise Methode der ersten, nicht lediglich der letzten Verhältnisse ist. Dadurch tritt die Aufgabe der Erzeugung der Grössen in den Vordergrund: ratio prima nascentium, quacum nascuntur. Et summa prima est, quacum esse (vel augeri) incipiunt. Durch die Methode der Indivisibilia werden die Demonstrationen zwar contractiores, aber diese Hypothese sei dennoch durior, und werde als minus geometrica geschätzt. Desshalb habe er die Methode der Grenzen vorgezogen. Nichtsdestoweniger hat er sie erweitert, seine Fluxion ihr einverleibt, so dass er dieselbe ausdrücklich erst im zweiten Buche zu erwähnen sich veranlasst sah.

Auch ist bemerkenswerth, wie er den Einwurf abwehrt, dass es kein letztes Verhältniss verschwindender Grössen gebe; denn vor dem Verschwinden sei es kein letztes, und nach demselben könne überhaupt kein Verhältniss stattfinden. Seine Widerlegung wird durch das mechanische Motiv, durch den Gedanken der Fluxion geleitet. „Aus demselben Grunde könnte man aber auch behaupten, dass ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe... Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man diejenige, weder mit welcher der Körper sich bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblick, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit welcher der Körper den Ort berührt und mit welcher die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältniss verschwindender Grössen dasjenige zu verstehen, mit welchem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden stattfindende.“[1]) Das letzte Verhältniss können wir demgemäss betrachten als die Endigung der Fortsetzung des ersten Verhältnisses. Denn ohne das erste Verhältniss würde man nicht anfangen können, die Erzeugung der Grössen mathematisch zu beschreiben und zu bestimmen. Die Ausführung dieser Einzigen und durchgängigen Aufgabe erfordert die Fortführung dieser Ansätze, die Hinausführung der ersten zu den gleichartigen letzten Verhältnissen.

---

[1]) Princ. übers. von Wolfers, Scholion zu § 12 = § 11, S. 54.

Eine Schwierigkeit könnte jetzt nur noch der Ausdruck im unmittelbar folgenden Absatze enthalten: dass die letzten Verhältnisse, mit denen die Grössen verschwinden, revera nicht die Verhältnisse der letzten Grössen seien, sondern die Grenzen, denen die Verhältnisse sich continuirlich nähern, welche sie jedoch nicht früher erreichen können, als bis die Grössen ins Unendliche verkleinert sind. Das Untheilbare aber will er hier gerade fernhalten; und seine Fluxion, die auch hier das beweisende Motiv bildet, ist ja zum Entsatz des Untheilbaren erdacht. Mithin bezieht sich jenes obige revera auf den Einwand: dass nun doch Alles aus Untheilbarem bestände; womit zugleich die Fluxion widerlegt und erledigt wäre. Das Untheilbare hat eben nicht die ausgesprochen geometrische und mechanische, die erzeugende Bedeutung. Dies wird aus dem folgenden Satze einleuchtend. „Deutlicher ist die Sache bei unendlich grossen Grössen einzusehen. Werden zwei Grössen, deren Unterschied gegeben ist, ins Unendliche vermehrt, so ist ihr letztes Verhältniss gegeben, nämlich das der Gleichheit; jedoch werden damit nicht die letzten oder allergrössten Grössen, deren Verhältniss jenes ist, gegeben.“ So genau fasst Newton das dari als das geometrische Bestimmen, und nicht als sinnliches Wahrnehmbarmachen.

Das Letztere vermisst Berkeley, indem er — spottet seiner selbst und weiss nicht wie — die Fluxionen shadowy entities nennt und fortfährt: so difficult to imagin or conceive distinctly. Und so gar nicht begreift derselbe die vornehmlich realisirende Bedeutung der Fluxion, dass er die Verhältnisse, mit welchen die Grössen verschwinden, als ghosts of departed quantities verspotten zu können glaubt.[1])

Die erzeugende Bedeutung der Fluxion lässt sich dagegen an der Einzigen Stelle der Principia, an welcher Newton sie erwähnt hat, schon aus dem Ausdruck Genita für Function erkennen. Die Grössen, denen dieser Name zukommt, wie Producte, Wurzeln, Quadrate, Cuben, werden als motu fluxuve perpetuo wachsend oder abnehmend betrachtet. Ihr momentanes Increment oder Decrement nennt er hier, wie in der ersten hierauf bezüglichen Abhandlung: Moment. Cave tamen intellexeris quantitates finitas. Particulae finitae non sunt momenta, sed

[1]) The Analyst, Works edd, Fraser vol. III, p. 283, 289.

quantitates ipsae ex momentis genitae. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Auch wird nicht die Grösse der Momente hier betrachtet, sondern prima nascentium proportio. Diese Momente seien auch als Geschwindigkeiten, Bewegungen, Veränderungen und Fluxionen der Grössen zu verstehen, oder als beliebige endliche Grössen, welche jenen Geschwindigkeiten proportional sind.[1]) Dies ist die Stelle, zu welcher in den beiden ersten Ausgaben das Scholion mit der Erwähnung von Leibniz' Methode sich befand: „welche von meiner kaum weiter abwich, als in der Form der Worte und Zeichen, und der Idee der Erzeugung der Grössen."[2]) Wir haben dagegen gesehen, dass die letztere Art der Abweichung, in der Idee der Erzeugung der Grössen, dem Hauptgedanken nach nicht bemerkbar ist. Es geht dies noch deutlicher und bestimmter aus der letzten Abhandlung hervor, die wir nunmehr zu betrachten haben, in welcher Newton selbst zum Ersten Male, im Jahre 1704, seine Methode publicirt, dem Tractatus de Quadratura Curvarum.

66. Die Erzeugung der Grössen und die Natur. — In der Introductio zu dieser Schrift wird der Gesichtspunkt der Erzeugung der Grössen für die Entdeckung der Fluxions-Methode eindringlich geltend gemacht. Der erste Satz der Abhandlung lautet: Quantitates Mathematicas, non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineae describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed per motum continuum Punctorum; Superficies ... Solida ... Anguli .. Tempora per fluxum continuum et sic in ceteris. **Hae geneses in rerum natura locum vere habent,** et in Motu corporum quotidie cernuntur.... Considerando igitur, quod Quantitates aequalibus Temporibus crescentes et crescendo genitae, pro Velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores, Methodum quaerebam determinandi Quantitates ex Velocitatibus Motuum vel Incrementorum, quibus generantur; et has Motuum vel Incrementorum Velocitates nominando Fluxiones, et Quantitates genitas nominando Fluentes, incidi paulatim annis 1665 et 1666 in Methodum Fluxionum,

---

[1]) Principia II, sect. II, § 10 Lemma, übers. von Wolfers, S. 243.
[2]) Wolfers, S. 598.

qua hic usus sum in quadratura curvarum.[1]) Es mag genügen, auf die principielle Uebereinstimmung mit Leibniz hinzuweisen, die Newton in dem Satze ausgedrückt hat: hae geneses in rerum natura locum vere habent. Darin spricht sich klar und leitend die Tendenz aus, die mit der Idee des Unendlichkleinen verbundene mystische Vorstellung abzuweisen: volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen potest Analysis in Figuris quibuscunque, seu finitis seu infinite parvis, quae figuris evanescentibus finguntur similes, ut et in Figuris, quae per Methodos Indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas.[2]) Um so lebendiger aber vermag er den fruchtbaren, den schöpferischen Gedanken in der Fluxion, die nunmehr auch nicht mehr Moment heisst, festzuhalten. In dem Fluxus liegt sogar auch die Zeit begründet. In diesem Sinne kann daher Newton sagen: Figurarum et quantitatum generatio per Motum continuum magis naturalis est.[3])

67. Entdeckung und Begründung. — Leibniz und Newton haben Beide den erkenntnisskritischen Grund ihres Begriffs durchschaut. Beide sind Entdecker desselben. Und sie erweisen sich als solche in dieser erkenntnisskritischen Begründung, in der Ueberschau über die Tragweite ihrer Voraussetzung, und in der Anbahnung sachlicher Momente, welche als schöpferische Motive sich erkennen lassen. Der Prioritäts-Streit wird von diesem Gesichtspunkte aus gegenstandslos. Bei Leibniz, wie bei Newton ist der Infinitesimalbegriff ein Ausdruck ihres systematischen Grundgedankens, ihrer idealistischen Auffassung der Realität. Je trouve, que les règles du fini réussissent dans l'infini ... et vice que les règles de l'infini réussissent dans le fini, sagt Leibniz. Und dieser Verschlingung und Durchdringung des Endlichen mit dem Unendlichen entspricht bei Newton der bündige Satz: Hae geneses in rerum natura locum vere habent. Daher ist bei Leibniz das Differential ein Ausdruck der intensiven Realität, nur dass er dieselbe als einfache Substanz und Monade denkt. Und bei Newton ist die Fluxion auch in der Methode der Verhältnisse noch

---

[1]) Opusc. I, p. 203, 204. — [2]) ib. p. 207. — [3]) Brief an Wallis. Opusc. I, p. 363.

gewahrt, insofern diese nicht schlechthin die der letzten, sondern die der ersten Verhältnisse ist.

Zur Einführung ihrer Entdeckungen erstrebten Beide also die erkenntnisskritische Begründung, in welcher die Quelle ihres Begriffs lag. Dagegen haben sie zugleich der eigenen Unsicherheit wie den Vorurtheilen des Zeitalters nachgebend, hinterher einer Vereinbarung ihrer neuen, bekämpften Begriffe mit den alten Methoden sich nicht entziehen mögen. Bei Leibniz geht diese Connivenz soweit, dass er das Differential als einen modus loquendi bezeichnet, und Vergleichungen zu seiner Erläuterung anstellt, die er in Briefen häufig wiederholt und variirt, denen zufolge die erzeugende Realitäts-Einheit zu einem subjectiven, relativen Vergeichungs-Massstab wird, wie ein Sandkorn zur Erdkugel. Und Newton geht zur allerdings principiell verbesserten und damit überstiegenen Grenz-Methode zurück, und würdigt diejenige Entdeckung, um deren Prioritäts-Anspruch er sich in einen erbitterten Streit begiebt, in seinem systematischen Hauptwerke kaum einer flüchtigen Erwähnung. Nichtsdestoweniger bleibt es klar und einleuchtend, dass zur Entdeckung des Gedankens die erkenntnisskritische Beleuchtung gehörte, wie gering an Deutlichkeit dieselbe immerhin bisweilen sich zum Ausdruck brachte.

Nachdem jedoch die Entdeckung vollzogen und bestimmt war, sind die Versuche auch bei den Entdeckern selbst verständlich, dieselbe durch die traditionelle Methode der Grenzen zu behaupten und zu schützen. Denn wir haben vielfach die Schwierigkeiten kennen gelernt, welche mit der Voraussetzung eines realisirenden Grundbegriffs verknüpft sind. Damit aber entstand der Schein, dass die alte Methode, weil sie jener schwierigen Erkenntniss-Voraussetzung zu entbehren schien, damit auch der Logik gemässer wäre, als welche doch in der That die Realität nicht voraussetzt. Dieser Schein hat sich bis auf unsere Tage erhalten, insofern man die Grenz-Methode als der logischen Strenge angemessener betrachtet. Diese Annahme zeigt nicht nur den Mangel an Unterscheidung von Logik nnd Erkenntnisskritik, sondern hat noch eine eigene Unklarheit bezüglich der sogenannten logischen Strenge und Schärfe.

68. Die Voraussetzungen und Mängel der Grenz-Methode. — Wir haben oben (2) ausgesprochen, dass die Grenz-Methode auf der Indifferenzirung von Grenze und Gleich-

heit beruht. Die Gleichheit aber kennen wir nach Leibniz als eine unendlichkleine Ungleichheit (51). Somit corrigirt der Grenzbegriff den Begriff der Gleichheit, aber durch die Supposition des Unendlichkleinen, welches bei der Correctur der Gleichheit Grenze benannt wird. Diese Correctur ist erforderlich und bestätigt sich; jedoch nicht logisch, sondern allein erkenntnisskritisch. Die Gleichheit bedeutet ein extensives Verhältniss angenommener Einheiten, deren Erzeugung in der Anschauung sich vollzieht. Die extensive Gleichheit ist demgemäss Gleichartigkeit, die Einheiten selbst mögen sein und wechseln, welche und wie sie wollen. Die Summirung dieser Einheiten ist daher auch eine fictive, lediglich in der Vergleichung schwebende.

Um diese Fiction aufzuheben, tritt die neue und andere Art von Grösse ein, welche die bisher mangelnde Realität hinzubringt. Es tritt also nicht etwa zur Ergänzung die logische Identität ein, die doch lediglich nur Sicherung und Fixirung der Denkoperationen garantiren könnte (4), während es sich hier um Gegebenheiten der Anschauung (25) handelt. Und diese Gegebenheit, diesen Charakter der Anschauung soll und kann auch die intensive Grösse der Realität erlangen, sofern sie Grösse ist. Auch ist die intensive Grösse als Grundsatz zu denken (30), also stehen wir mit ihr wie mit der extensiven auf erkenntnisskritischem Grunde.

Und dennoch ist es ein guter, wenngleich schlechtverstandener Gedanke, welcher sich für die Infinitesimal-Methode, oder wie es von Seiten der Nachahmer für die Grenz-Methode geschieht, auf die allgemeinen Grundlagen der Logik beruft. In der That soll die Abstraction logischer Gesetze die rudimentäre Grundlage für alle Entwickelungen der Erkenntnissgebilde darbieten, wenngleich nicht alle Mittel für die Entwickelung. Dieses allgemeine logische Fundament, welches sich auch unter die Wurzeln der Anschauung erstreckt, haben wir in dem Grundgesetz der Continuität des Bewusstseins zu Grunde gelegt. Unter Voraussetzung dieses Grundgesetzes, aber nur unter dieser Voraussetzung, kann man daher von der Grenz-Methode als einer logischen reden. Die Continuität überbrückt die Kluft, welche extensiv bestehen bleiben würde, zwischen Grenz-Verhältniss und Gleichheits-Verhältniss durch das Surrogat der intensiven Grösse. Aber diese selbst, die

Consequenz der Stetigkeit, ist an sich nicht eine blos logische Operationsgrösse, sondern eine Gegebenheit der Anschauung, in welche der Begriff der Realität sich eingräbt.

Es ist daher genauer und verhütet Missverstand, Unklarheit und schwere Irrthümer, wenn man innerhalb der Logik nur von der Identität, nirgend von Gleichheit redet (2). Das Grundgesetz des Bewusstseins, welches als Satz der Identität gefeiert ist, bezieht sich ausschliesslich auf die Operationen, also auf das Bewusstsein des Denkens, während das Gesetz der Continuität sich auch auf das Bewusstsein der Anschauung oder der Sinnlichkeit erstreckt. Identität sichert die Denk-Gebilde als solche, abgesehen von ihrer Bezogenheit oder Beziehbarkeit auf Gegebenes. Identität entspricht daher genau dem Geltungswerthe logischer Gesetzmässigkeit: der Fixirung und Präcision des Denkens bei aller Variabilität der Begriffe.

In der Vernachlässigung dieses Unterschiedes von Gleichheit und Identität hat die neuere Englische Logik ihre Quelle. Es ist von vornherein falsch zu sagen: Alle A sind = B; wie es falsch ist zu sagen: A = A. Mithin fällt das Bedürfniss fort, das Prädicat B zu quantificiren, um den angeblichen Fehler der Gleichheit zu verbessern. Uebrigens, freilich damit zusammenhängend, erledigt eine correcte logische Fassung des Urtheils jenes Desiderat.

Aus diesen Erwägungen ergiebt sich, dass die angenommene logische Kraft der Grenz-Methode lediglich in dem allerdings logischen Grundgesetze der Continuität des Bewusstseins beruht, von welchem sie jedoch für das Bewusstsein der Sinnlichkeit, für die Gebilde und Grössen der Anschauung Anwendung macht. Ueber diese übergreifende Anwendung muss der interne mathematische Gebrauch der Grenze sich klar werden: dass derselbe nur durch die Erkenntnisskritik gerechtfertigt werden kann, als in welcher jene weitere, angewandte Bedeutung der Continuität zur Basirung gelangt. Gemäss derselben aber geht die extensive Grösse in die intensive über.

Nach der logischen Continuität nämlich darf ich nur versichert sein, dass, was nicht Tisch ist, darum nicht Wehmuth zu sein braucht; dass die Denk-Gebilde als solche in dem non-A eine orientirungsreiche Unterkunft haben, allwo das Zusammengehörige sich zusammenfindet. Tisch und Wehmuth

aber (41) sind anticipirende Illustrationen dieser rein logischen Erzeugnisse, welche nur für die Sicherung der Denk-Operationen als A und non-A stehen wollen. Die erkenntnisskritische Continuität dagegen verbürgt Mehr; ermöglicht das Hinzudenken einer Einheit, die nicht nur extensive, willkürliche Vergleichungs-Einheit ist, sondern Realitäts-Einheit, welche als solche einen absoluten Punkt setzt, aus welchem die Linie hervorgeht, nicht blos in welche, als ihre Grenze die Linie sich zusammendehnt. Imo extensione prius (58, S. 71). Die Continuität des Bewusstseins der Anschauung macht aus der Vergleichungs-Einheit die Erzeugungs-Einheit (44). Die Realität bleibt somit nicht blosser Begriff, sondern sie hat Gegebenheit zu vertreten; und dadurch gelangt sie zu ihrer vollen erkenntnisskritischen Bedeutung; Realität bedeutet intensive Grösse. Diesen Uebergang von der extensiven Grösse zur intensiven Realität leitet und bewirkt die erkenntnisskritische Erweiterung der Continuität.

Wir erkennen demnach die doppelten Mängel der Grenz-Methode. Einmal setzt sie in der Behauptung der Indifferenz von Gleichheit und Grenze ein Grundgesetz des Bewusstseins voraus, das der Continuität, dem sie jedoch — und das ist der andere Fehler — in der Grenze nicht gerecht wird. Denn die Continuität erstrebt, ermöglicht und verbürgt Realität. Diese aber soll und kann die Grenze nicht bedeuten. In dem Gedanken der Realität, gegenüber den Leges phantasticas (51, S. 54) der extensiven Mathematik, ist die Infinitesimal-Rechnung als die Mathesis Intensorum entstanden. Einmal entdeckt jedoch, lässt es sich aus den erwogenen Ansichten vom angeblich Logischen verstehen, wie die Nachfolger das schöpferische Motiv des Infinitesimalen mit dem negativen Grenzbegriff vertauschen und vermischen konnten.

69. Das Unendlichkleine als Null. Euler. — Unter den Nachfolgern also handelt es sich vorzugsweise um das, was man logische Begründung gemeinhin nennt, um das Recht der Vernachlässigung von Grössen, die man zuvor als vorhandene erkannt und geltend gemacht, und um die nachträgliche Anerkennung und Geltendmachung derselben Grössen, die man zuvor vernachlässigen zu dürfen behauptet hat. Unter diesen nimmt Euler in mehrfacher Hinsicht einen hervorragenden Platz ein, nicht nur als Mathematiker, dem um die Fortbildung der Infini-

tesimal-Rechnung die grössten Verdienste zugesprochen werden, sondern auch als Metaphysiker, dessen Ansichten unter den Zeitgenossen besonders von Kant in allen Perioden seiner Laufbahn gewürdigt wurden.

Wir haben schon früher (S. 54) darauf hingewiesen, dass Eulers Opposition gegen die Differentialien als eine der extensiven Zahl ebenbürtige Grössen-Art auf seiner Opposition gegen die Monadenlehre beruhen möchte: genauer auf der Vermischung der intensiven oder inextensiven Grösse mit dem Einfachen. Dieses Motiv seines Widerspruchs ergiebt sich unzweideutig aus den einleitenden Erwägungen, die er im dritten Capitel seiner Institutionen zur Differential-Rechnung anstellt, in denen er das Unendliche und Unendlichkleine im Zusammenhange mit der Frage der Theilbarkeit der Materie behandelt. Das Zurückgehen auf ein Ausdehnungsloses hat für ihn nur die Bedeutung der Annahme von einfachen Theilen.[1]) Dagegen ist ja aber im dx ein dx^2 latent, also ein Einfacheres, das dennoch nicht als Theil gedacht werden darf. Für Euler war jedoch diese Consequenz der Rechnung nicht eine Instanz gegen jene Identificirung von Differential und einfacher Monade, sondern eine Warnung und Stütze, die angebliche intensive Grösse jenes Differentials zu bekämpfen und zu entwerthen. Zu diesem Behufe griff er zu einem verzweifelten Mittel, zu dem die Entdecker selbst die Hand geboten hatten. Beide reden von dem status evanescens, Beide aber mit der Vorsicht, weder nach, noch vor dem Verschwinden, sondern im Verschwinden selbst das Unendlichkleine zu fixiren. Euler scheint hierin eine Schwäche der Argumentation zu vermuthen, und macht das Differential oder die Fluxion — denn beide Ausdrücke schätzt er als gleichwerthig[2]) — schlechthin zur Null.

Es ist offenbar, dass er hierin nur der Grenz-Methode folgt, dieselbe aber überbietet: indem er das Increment selbst, nicht den Vorgang, als verschwindend (incrementum evanescens) annimmt, als Null. Dennoch aber ergiebt die Rechnung mit solchen Nullen endliche Grössen; denn vermittelst derselben gelingt es, worauf es allein abgesehen ist, Gesetzmässigkeiten in den Veränderungen der Grössen zu bestimmen. Diese Gesetzmässigkeiten in den Zusammenhängen veränderlicher Grössen,

[1]) Vgl. besonders § 79. — [2]) Vgl. §§ 114—117.

die Functionen lassen sich ermitteln in dem Verhältniss, welches die Incremente eingehen. Wird z. B. x um ω vermehrt, so erhält die Function x^2 den Zuwachs $2x\omega + \omega^2$, und es verhält sich somit der Zuwachs von x zu dem Zuwachs von x^2, wie ω zu $2x\omega + \omega^2$, d. h. wie 1 zu $2x + \omega$. Je kleiner nun ω angenommen wird, desto mehr nähert sich das Verhältniss $2x + \omega : 1$ dem Verhältniss $2x : 1$. Wird $\omega = 0$, so wird $2x + \omega : 1 = 2x : 1$. Und dieses Verhältniss des Incrementes der Function x^2 zu demjenigen der veränderlichen Grösse x bleibt, obschon der Zuwachs von x^2, „wenn der Zuwachs von x in Null übergeht, mit demselben verschwindet".

Die Differential-Rechnung ist demnach „die Methode, das Verhältniss der verschwindenden Incremente zu bestimmen". „Sie beschäftigt sich also nicht sowohl mit den Incrementen selbst, denn diese sind Nullen; sondern vielmehr mit der Erforschung des Verhältnisses, welches sie zu einander haben; und da sich diese Verhältnisse durch endliche Grössen ausdrücken lassen, so muss man eigentlich sagen, dass die Differential-Rechnung endliche Grössen zum Gegenstand habe." [1]) Aber den Uebergang von der Null zur endlichen Grösse bewirkt doch allein die Grenze, und so ist eigentlicher die Grenze der Gegenstand der Differential-Rechnung. „Diese Grenze, welche gleichsam das letzte Verhältniss der gedachten Incremente ist, macht eigentlich den Gegenstand der Differential-Rechnung aus; und der hat eigentlich den Grund zu dieser Wissenschaft gelegt, welcher zuerst auf den Gedanken gerieth, diese letzten Verhältnisse zu untersuchen." [2]) Die Bezeichnung des $\omega = dx = 0$ bedeutet sonach die Basirung im Grenzbegriff.

Diese Auffassung der Null liesse sich erkenntnisskritisch rechtfertigen, sofern man die Null als non-A denkt und demgemäss limitativ bestimmt. Immer aber muss der Realitäts-Gedanke selbst als eine eigenmächtige Voraussetzung hinzugethan werden. Aus der Null kann die Realität nicht hervorgehen, ebensowenig aber auch die endliche Grösse. Euler ist daher auch bei dieser logischen Ansicht von der Grenze nicht stehen geblieben, sondern hat mathematische Argumentationen erdacht, um seine Nullificirung des Differentials zu begründen. Es ist

[1]) Anleit. z. Diff.-Rechnung. Vorr. Uebers. v. Michelsen I, L ff. — [2]) ib. LXX; vgl. § 99, wo Null „gleichsam" als die Grenze bezeichnet wird, durch welche man von den realen Grössen zu den imaginären kommt.

bezeichnend, dass auch diese Argumentationen auf den Begriff der Gleichheit sich beziehen, indem sie Geltungswerth und Tragweite desselben prüfen.

70. Die Arten der Gleichheit. — Euler unterscheidet „zwei Arten der Vergleichung der Grössen",[1]) und nimmt demgemäss zwei Arten des Verhältnisses der Gleichheit an: die arithmetische und die geometrische. Das arithmetische Verhältniss muss in jedem Sinne zwischen zwei Nullen Gleichheit ausmachen; nicht so das geometrische: $2:1 = 0:0$. In der Infinitesimal-Rechnung wird das geometrische Verhältniss zwischen verschiedenen unendlichkleinen Grössen, d. h. Nullen untersucht. So ist das Verhältniss $adx:dx$ das endliche Verhältniss $a:1$. Daher ist $a \pm ndx = a$; beide Glieder der Gleichung bilden geometrisch wie arithmetisch ein Verhältniss der Gleichheit. Die Weglassung der Nullen in Ansehung der endlichen Grössen entbehrt somit keineswegs der geometrischen Schärfe. Und ebenso muss auch dx^2 gegen dx verschwinden, weil $dx \pm dx^2$ und dx sowohl geometrisch wie arithmetisch in dem Verhältniss der Gleichheit stehen. So kommt Euler auf den Ausweg, dass $dx=0$ in die Rechnung eingeführt werden dürfe, weil und sofern es einer geometrischen Vergleichung dient, hinwiederum aber auch vernachlässigt werden könne und müsse, weil und sofern das unter den Nullen entstehende Verhältniss arithmetische Gleichheit ergiebt.

Indessen, mag nun rein mathematisch diese Betrachtungsweise streng sein oder nicht: sie erschleicht eine Voraussetzung, deren Discussion ihre Beweiskraft abhängig erscheinen lässt. Wie verschieden immer in einem geometrischen und einem arithmetischen Verhältniss zwei Nullen sein mögen, so haben sie doch zu allernächst die logische Gemeinsamkeit der Identität. Diese muss überall vorausgesetzt und ihre Unverletzbarkeit vorbehalten bleiben. Wenn nun diese Identität der begrifflichen Negation unzweifelhaft in jenen beiden Nullen gewahrt ist, so stützt sich die doppelte Bedeutung auf das Princip der Stetigkeit, welches vor dem Abgrund schützt, in den das Denken gerathen würde, wenn es einmal eine Null zu addiren oder mit derselben eine endliche Zahl zu multipliciren sich anschickt, darauf aber von der Vernachlässigung einer solchen

[1]) ib. S. 80.

nicht absteht. Die Stetigkeit allein vermag den Verdacht des Sophisma, der heute wie ehedem an der Annahme und Einsetzung jener Null haftet, zu zerstreuen.

In der That beruft sich Euler auch auf das Gesetz der Stetigkeit, und er redet in diesem Zusammenhang nicht sowohl von Nullen als vielmehr von unendlichkleinen Grössen, zu denen man von den endlichen Grössen übergehen müsse. Also ist es nicht das Zahlen-Räthsel der Nullen-Ungleichheit, das zu der Annahme einer besondern Art von Nullen nöthigte; sondern die unvermeidliche und unabweisliche Position einer besondern Art von Grössen wird uns aufgegeben, sofern wir, wie Euler selbst so einleuchtend zeigt, die Bewegungs-Vorgänge, z. B. den Weg einer geworfenen Bombe studiren und feststellen wollen.

71. Das Positive in der limitativen Null. — Aber dieses Beispiel gerade verräth die Unzulänglichkeit und versteckte Abhängigkeit der ganzen Betrachtungsweise. Euler sagt nämlich, die Bestimmung des Weges der Bombe sei schwierig, weil Richtung und Geschwindigkeit sich jeden Augenblick verändern. Wenn man dagegen die Zeit gänzlich verschwinden lasse, so fallen diese Verschiedenheiten fort, und man könne alsdann die einem Augenblicke zugehörige Veränderung der Bewegung angeben.[2]) Hier ist die Erschleichung des Positiven für die Null offenbar. Denn wenn die Zeit verschwindet, so verschwindet auch der Augenblick, mithin die dem Augenblick zugehörige Veränderung. Soll dagegen die letztere, der Impetus erfasst, und als intensiver Ursprung der Bewegung bestimmt werden, so darf die Zeit nicht gänzlich verschwinden. So wenig daher dt als Null gedacht werden darf, so wenig ist dx überhaupt als Null zu definiren. Bei dieser Auffassung wird die Entdeckung und ihre Tendenz verdunkelt; das Potitive, Selbständige, Unersetzliche, welches dieser neuen Grössenart zu Grunde liegt, wird nivellirt zu Gunsten einer Methode, die nur scheinbar selbständig verfährt, ihre Stützen vielmehr derselben Betrachtungsweise entlehnt, welche sie vermeiden will.

Eulers Irrthum ist sehr geeignet, die Nützlichkeit und Nothwendigkeit der logischen Unterscheidung von Limitation und Negation zu illustriren. Denn Euler kann die Stetigkeit nicht entbehren. Anstatt sie jedoch in ihrer

---

[1]) ib. S. 90, 93. — [2]) ib. Vorrede, LXXIV.

Positivität erkenntnisskritisch anzuerkennen, verschliesst er sich, weil er die erkenntnisskritische Bedeutung lediglich in der einfachen Monade geltend sieht, dieser schöpferischen Bedeutung der Sache und nimmt seine Zuflucht zur vermeintlichen logischen Exposition, welche jedoch nicht auf den Grund weder der Identität noch der Stetigkeit zurückgeht, und desshalb bei aller paradoxen Strenge Fehler und Erschleichungen begeht, — und zudem unzulänglich bleibt.

So sehen wir L'Huilier in seiner Preisschrift der Berliner Academie vom Jahre 1784 Exposition élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs (1786) gegen Euler zur Grenz-Methode zurückkehren,[1]) welche fortan bevorzugt bleibt.

72. La Grange's Metaphysik. — Ebenso wendet sich La Grange gegen diesen Ausweg, weil die Idee nicht klar genug sei, um als Princip einer „Wissenschaft zu dienen, deren Gewissheit auf Evidenz gegründet werden müsse".[2]) Die „wahre Metaphysik" dieses Calculs bestehe vielmehr in der innerhalb der Rechnung erfolgenden Compensation desjenigen Irrthums, mit welchem dieselbe beginne. Indessen richtet sich diese Ansicht, welche sich bereits bei Leibniz findet, schon dadurch selbst, dass La Grange hinzufügt: C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale. La Grange erkennt daher in Newtons Fluxions-Methode mit Vermeidung des Unendlichkleinen eine „Metaphysik, die klarer zu sein scheint, weil Jeder eine Idee von der Geschwindigkeit hat oder zu haben glaubt". Und dennoch sei sie une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourus par un mobile.[3]) Also bezeichnet La Grange desshalb die Geschwindigkeit als einen dieser Rechnungsart fremden Gedanken, weil er die Nöthigung in dem Fluxionsbegriff findet, diese Grössen als Linien zu betrachten, welche von einem Beweglichen durchlaufen werden. Dahingegen haben wir erkannt, dass jenes angebliche

[1]) § LXVII; vgl. Hauff, Zusätze zu seiner Uebersetzung von Carnot's Betrachtungen über die Theorie der Inf.-Rechnung, S. 101, welche gegen den Schluss entschiedene Spuren Kantischen Einflusses zeigen (vgl. S. 109).

[2]) Théorie des fonctions analytiques, § 4. — [3]) ib. § 5.

Bewegliche vielmehr selbst durch die Geschwindigkeit erzeugt werde: die Fluente durch die Fluxion.

Der schöpferische Begriff, der in der Entdeckung der Fluxions-Methode liegt, ist somit auch von La Grange nicht erkannt, wie er denn fortfährt: il faut avouer qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que la vîtesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vîtesse est variable. Die vermisste Idee ist aber gerade jene bekämpfte, die von Galilei bis zu Leibniz und Newton sich fortspinnt. Wenn daher La Grange nun diese Metaphysik, auch selbst wie sie in der Grenz-Methode nicht vermieden werde, ablehnt, so verräth er deutlich, was er unter Metaphysik versteht, indem er seinen Functionen-Calcul unabhängig bezeichnet de toute supposition et de toute métaphysique.[1])

Uebrigens hat La Grange, wie er in dem Schluss-Paragraphen seines Werkes es ausspricht, darthun wollen, dass die Methode des Unendlichkleinen nur ein „ingeniöses Instrument" sei, gegründet auf die Theorie der Functionen. Dieses Instrumentes bedient er selbst sich in seiner Analytischen Mechanik (zweiter Ausgabe). Ebenso beruft er sich in den Schlussworten seiner Théorie des fonctions auf „le nouveau traité du calcul différentiel de Lacroix, où ce calcul est présenté sous tous ces points de vue". Und Lacroix citirt in der eine historische Skizze enthaltenden Vorrede seines Werkes die folgenden Worte aus einem Schreiben La Grange's an ihn: „Le rapprochement des Méthodes que vous comptez faire, sert à les éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun, renferme le plus souvent leur vraie métaphysique: voilà pourquoi cette métaphysique est presque toujours la dernière chose qu'on découvre.[2])

73. Carnots Hilfsgrössen. — Wir haben noch eines französischen Versuchs zu gedenken, welcher diese Metaphysik zu beleuchten unternimmt, und auf welchen Lacroix, dem derselbe im Manuscript mitgetheilt war, mit Anerkennung und Uebereinstimmung sich bezieht: Carnots Réflexions sur la Métaphysique du calcul Infinitésimal (1797). Carnot beschränkt sich, wie fast alle Franzosen, auf die Metaphysik der Rechnung, und lehnt die Fragen nach der unendlichen Theilbar-

[1]) Théorie des fonctions analytiques, § 9. — [2]) 2. ed. XIX.

keit der Materie und des Raumes ausdrücklich ab, als Fragen, von denen er bemerkt: si tant est qu'elles méritent d'être appellées des questions.[1]) Durch diese Einschränkung der Aufgabe bescheidet er sich auf interne, mathematisch logische Begründung, bei welcher jedoch der Anfang der Rechnung trotz aller Plausibilität der Beispiele willkürlich und problematisch bleibt.

Eigenthümlich ist seiner Betrachtungsweise die Unterscheidung von quantités désignées als solchen, welche durch den Ausdruck der Aufgabe gegeben oder Functionen derselben sind, und quantités non-désignées ou auxiliaires als solchen, welche in die Rechnung eingeführt werden, um die Vergleichung der gegebenen Grössen zu erleichtern.[2]) Demgemäss bestimmt er die Grenze als diejenige designirte Grösse, welcher eine Hilfsgrösse sich beständig nähert. Der Begriff der Grenze ist nur auf Hilfsgrössen anwendbar; die designirte Grösse ist die Grenze ihrer selbst.[3]) Da die Einführung des Unendlichkleinen nur die Einführung einer Hilfsgrösse ist, der man anfänglich einen willkürlichen Werth giebt, um sie, wenn sie ihre Schuldigkeit gethan, verschwinden zu lassen, so kann man sagen: que le calcul infinitésimal est un calcul non fini, ou qui n'est pas encore achevé. Seinen Abschluss erreicht der Infinitesimal-Calcul in der gewöhnlichen algebraischen Rechnung.[4])

So vergleicht Carnot die Analysis des Unendlichen mit Descartes' Methode der unbestimmten Coefficienten,[5]) deren Erweiterung sie sei. In der That besteht der Charakter dieser Grössen nicht in ihrer petitesse réelle, mais plutôt dans leur indétermination absolue,[6]) d. h. in der Eigenschaft, während des ganzen Calculs willkürlich zu bleiben, und unabhängig von den designirten Grössen. Die Infinitesimalgrössen sind desshalb nicht des êtres chimériques, mais de simples quantités variables charactérisées par la nature de leur limite, qui est 0 pour les quantités infiniment petites. Und demgemäss unterscheidet er am mathematischen Unendlichen zwei Arten: l'infini sensible ou assignable et l'infini absolu ou métaphysique, lequel n'est autre chose que la limite du premier. Dieses mathematisch-metaphysische Unendliche bezeichnet er

---

[1]) Réflexions, § 13. — [2]) ib. § 14, 15. — [3]) ib. § 17. — [4]) ib. § 30. — [5]) ib. § 37. — [6]) ib. § 40.

mit Newton als quantité évanouissante. Denn diese verschwindenden Grössen wären als simple Nullen unnütz; vielmehr bezeichnen sie: que de tous les rapports et relations dont elles sont susceptibles en qualité de quantités nulles, on ne veut considérer et faire entrer dans les combinaisons du calcul que celles qui leur sont assignées par la loi de continuité.[1]) Der Nerv der ganzen Betrachtung liegt somit in dem Gesetz der Continuität, dem zufolge das System der Hilfsgrössen dem der designirten sich anzunähern vermag.[2])

Indem er aber dieses Fundament gewinnt, erhebt er sich unwillkürlich von der formalen mathematisch-logischen Betrachtung zur erkenntnisskritischen. Die verschwindenden Grössen seien in Wahrheit des êtres de raison; mais cela n'empêche pas qu'elles n'aient des propriétés mathématiques. Niemand bezweifle die Genauigkeit der Rechnung mit imaginären Grössen, die doch nur hiéroglyphes de quantités absurdes seien: dahingegen seien die verschwindenden Grössen doch Grenzen de quantités effectives et touchent pour ainsi dire à l'existence.[3]) Der Grund für diese „Berührung der Existenz" liegt in dem Gesetze der Continuität, liegt in dem erkenntnisskritischen Gesichtspunkt.

So giebt Carnots mathematisch-logische Begründung sich selbst auf, indem er aus den unvollkommenen Gleichungen, welche nur die Compensation des Irrthums gewähren, nunmehr kraft der Continuität, welche auch jene Compensation vollzieht, die reale, „effective" Natur der Grössen constituirt. Und so erkennt er den principiellen Unterschied in der Infinitesimal-Methode von der Methode der Grenzen: et qu'enfin cette méthode, loin d'être la même que celle du calcul de l'infini, n'est au contraire que l'art de s'en passer et d'y suppléer par le calcul algébrique ordinaire.[4]) Dies sind Andeutungen, die Carnot dem Ziele gemäss, das er sich selbst gesteckt hat, nicht weiter verfolgt, mit denen er über dasselbe hinausgeht. Aber am Schlusse seiner Abhandlung noch entschlüpfen ihm gegen Diejenigen, welche den Begriff der Infinitesimalgrössen ächten, die merkwürdigen Worte, dass dieselben doch zu den Namen des Unendlichen und Unendlichkleinen genöthigt seien .. et qu'ils traitent de chimère l'existence

[1]) Réflexions, § 42. — [2]) ib. §§ 18, 44, 45. — [3]) ib. § 46. — [4]) ib. § 48.

des choses mêmes dont ils sont les hiéroglyphes. Hier ist deutlich die positive Bedeutung zum Ausdruck gelangt, welche gegenüber dem Grenzen- und Nullbegriff des Unendlichkleinen in der Infinitesimalgrösse liegt, die nach dem Gesetze der Stetigkeit (entsteht und) verschwindet.

74. Wolfs Intensio als Qualität. — So zeigt sich in dieser Richtung selbst, welche von Metaphysik sich fernzuhalten beflissen ist, die Nöthigung, zum echten lebendigen Verständniss der neuen Rechnungsart eine neue Grössenart anzunehmen. Diese neue Grössenart ist die intensive Grösse. Und wir haben gesehen, dass nicht nur bei Leibniz, sondern schon bei Galilei die Bedeutung dieser intensiven Grösse wirksam ist. Wolf dagegen hat sich in dem Capitel De Ente finito et Infinito seiner Ontologie an den von Leibniz hingeworfenen Ausdruck gehalten, dass das Unendliche ein modus loquendi sei, und demgemäss vornehmlich ausgeführt: Infinite parva impossibilia sunt;[1]) non sunt verae quantitates sed saltem imaginariae.[2]) Indessen fügt er doch in der Anmerkung hinzu: Entia imaginaria substituuntur veris, quibus notio realis respondet. Atque adeo datur aliquid in quantitate reali, quod per modum infinite parvi aut infinite magni fingitur. Dass in der Mechanik dieses „fingirte" Unendlichkleine, welches in der realen Grösse „gegeben" sei, als intensive Grösse definirt werde, das sagt Wolf nicht; aber nichtsdestoweniger beschreibt er die letztere in der für diese Gleichstellung passenden und correcten Weise.

Zunächst bestimmt er in dieser Richtung den Grad. Gradus est discrimen internum quantitatum earundum, scilicet quod solum salva identitate in easdem cadit.[3]) Daher: gradus sunt quantitates qualitatum. Der Grad ist nach dem Satz der Scholastiker: quantitas virtutis im Gegensatz zur quantitas molis, quae est extensorum.[4]) Da nun aber auch die Grade sich durch gerade Linien ausdrücken lassen, so schliesst er: Qualitatum possibilem esse cognitionem mathematicam; und er bemerkt hierzu: Non desunt exempla hujus cognitionis in Scriptis Mathematicorum recentiorum. Dennoch fehle es an einer Mensura qualitatum.... Praesupponitur enim qualitatum cognitio certa cum historica, tum subinde philosophica,

---

[1]) Ontologia, § 803. — [2]) ib. § 804. — [3]) ib. § 746. — [4]) ib. § 760.

antequam de gradibus metiendis cogitare possis. In desideratis itaque adhuc est disciplina, in qua principia cognitionis rerum finitarum generalia traduntur, unde mensuras hauriant geometrae in cognitione naturae mathematica calculos suos utiliter exercituri, sicut ratiocinandi principia ex elementis Euclidis petunt. Atque ita disciplina potiori jure Mathesis Universalis appellaretur, quam quantitatum in genere seu numerorum indeterminatorum scientia ... atque sic demum obtineremus vera philosophiae naturalis ac Psychologiae principia mathematica, philosophis ad ulteriora et promiscue omnibus ad praxin accuratam profutura.[1])

Es ist bemerkenswerth, dass die vermissten vera Principia mathematica zugleich als philosophiae naturalis ac Psychologiae gefordert werden. Dass dieser allgemeine Grössenbegriff jedoch in dem Unendlichen liege, und dass dadurch in ihm die Realität begründet werde, diese Einsicht ist Wolf verschlossen, obschon er von Leibniz anführt: nihil in motu reale esse, quam momentaneum illud, quod in vi ad mutationem nitente constitui debet; und obschon er Tschirnhausen dafür citirt, dass es sich widerspreche: ut extensio absque motu concipiatur, was er für gleichbedeutend hält mit dem Satze: dass die extensio nicht gedacht werden könne ohne dasjenige, quod est reale in motu.[2]) Denn diese Realität wird von ihm lediglich zu Gunsten von Leibnizens Kraftbegriff geltend gemacht.

Dagegen erkennt er die Bedeutung des Intensiven oder des Grades für die mathematische Erkenntniss, insofern in demselben das Maass der qualitativen Grössen vorausgesetzt werde: ut adeo Intensitas sive Intensio sit graduum multidudo, quemadmodum magnitudo partium multitudo. Aber auch hier setzt er den Unterschied zwischen extensiver Grösse und Grad: quod partes lineae rectae actu extra se invicem existant et extensum continuum forment; in gradu autem minores .. cum partes tantummodo imaginariae sint, extra se invicem non existant, neque adeo extensum efficiant.[3]) Mit Recht bezieht sich daher Wolf in dem folgenden Paragraphen für diesen Begriff des Grades auf die Uebereinstimmung cum notione Philosophorum recepta.

---

[1]) Ontologia § 755. — [2]) ib. § 761. — [3]) ib. § 759.

75. Baumgartens Mathesis Intensorum. — Diese Anknüpfung des scholastischen Begriffs der Intensität an die mathematischen Untersuchungen, wenngleich irrthümlicher Weise an die der Mathesis adplicata hat doch den Gedanken an die Verbindung rege gehalten, die zwischen Intensität als einer mathematischen Grösse und Realität bestehe oder schwebe. Und wie wenig Baumgarten die Tendenz und Bedeutung dieser Verbindung begreift, so redet er doch von einer „Mathematik unausgedehnter Grössen, Mathesis intensorum",[1]) und im Zusammenhang damit von der Realität und deren Graden. „Die Unendlichkeit ist eine Realität."[2])

76. Lamberts Intensives und die Empfindung. — Lambert bekämpft diese Beziehungen Baumgartens auf die Mathematik; bei deren Erwägung „man beinahe glauben müsse, das philosophisch Richtige sei mathematisch unrichtig und hinwiederum".[3]) Dagegen beruft er sich viel und mit Anerkennung auf Wolf und dessen „Begriff einer allgemeinen Mathematik".[4]) Indessen versperrt er sich selbst den Zugang zu derselben, durch die Art, in der er die „erste Anlage" derselben sucht. „Diese erste Anlage fängt, wie unsere übrige Erkenntniss bei den Sinnen und Empfindungen an, und so wie wir nach und nach zu den Begriffen der Dinge und ihrer Eigenschaften gelangen, gelangen wir zugleich mit zu den Begriffen ihrer Grösse und Grade."[5]) Von diesem Anfang seiner wissenschaftlichen Untersuchung kann er freilich nicht zu der klaren Einsicht vordringen, welche Bedeutung das Intensive für die Entdeckung seines mathematischen Werthes bewiesen habe; aber er kennt diesen mathematischen Werth zu genau, um an der Kennzeichnung desselben vorbeizugehen.

So vermeidet er zunächst die Ungenauigkeit und Zweideutigkeit, die in Baumgartens Uebersetzung des Intensiven durch das „Unausgedehnte" liegt, wofür er die „Stärke" einsetzt. „Ein Theil des Raumes oder der Zeit ist nicht intensive mehr Raum oder Zeit als ein jeder anderer." Auch ist absolute Continuität in ihnen; doch finden wir „Dinge" in Beiden, „deren jedes als ein Ganzes oder als eine Einheit für sich genommen und folglich eine Abzählung derselben gedacht werden kann, die

---

[1]) Metaphysik, neue Aufl. 1783, § 170. — [2]) ib. § 181. — [3]) Architektonik 1771, § 685. — [4]) ib. § 688. — [5]) ib. § 689.

nach lauter ganzen Zahlen fortgeht."[1]) Durch „Nachahmung" nähmen wir auch Theile des Raumes und der Zeit als Einheiten an. Von der Intensität dagegen nimmt er nicht nur Grade, sondern auch Arten an, wie solche in dem höheren und dem stärkeren Ton sich zeigen.

Also die Hauptschwierigkeit des Unterschiedes und der „Kennzeichen" beider Arten von Grösse liegt in ihrer — Empfindungsweise. Durch die Bezugnahme auf das Bewusstsein leitet Lambert demnach die entscheidende Wandlung in der Bedeutung dieses Unterschiedes ein. In der Ausdehnung „existiren die Theile gleichsam ausser einander, und man denket ihre Summe, ohne dass die Theile sich darin vermengen, oder aufhören, ausser einander zu sein. Hingegen, wo die Sache intensive genommen werden muss, da stellen wir uns nur die Summe vor, und diese besteht dergestalt in der Aufhäufung der Theile, dass wir keines davon besonders empfinden." Daher sei nur bei der Ausdehnung „Entwickelung, Deutlichkeit und Klarheit", bei dem Intensiven dagegen „schlechthin nur Klarheit in der Empfindung und Vorstellung derselben. Daher ist auch im ersteren Falle das Zählen leichter als im letzteren, und um desto mehr hat man darauf zu sehen, wo der erstere vorkommt, und wiefern der letztere auf denselben reducirt werden kann."[2]) Mithin wird die Empfindung und Vorstellung des Intensiven dennoch der Controle des Zählens unterworfen. So sehen wir überall den die Zahlen erweiternden Begriff des Unendlichkleinen hart berührt, ohne dass es zu der einfachen Fassung kommt: dass dies und nichts Anderes das Intensive sei.

Bestimmter noch trifft er den Punkt in ferneren Ausführungen: „Was keine absolute Einheit ist, sondern der Intensität nach Grade haben kann, verstärket diese Grade nicht schlechthin von sich selbst." Aber eine Aufhäufung von neuen Theilen lasse sich dennoch gedenken, ungeachtet es bei den Intensis immer nur um die ganze Summe zu thun sei. „Wir machen hier diese Anmerkung in einer gedoppelten Absicht. Denn einmal sind wir gewöhnet, das Maass der Stärke oder Intensität ebenso wie das Maass der Ausdehnung durch Zahlen und Linien vorzustellen ... Sodann zeiget diese Anmerkung, dass eine solche Vorstellungsart ihren Grund habe, und bei der Intensität immer

[1]) Architektonik § 690. — [2]) ib. § 693.

etwas mit vorkomme, welches entweder wirklich ausgedehnet, oder dem ausgedehnten ähnlich ist, und auf eben die Art tractirt werden kann."[1])

Mit dieser Wendung mündet er in die Betrachtungen ein, mit denen die neue Epoche des Intensiven begonnen wurde, obschon er auch hier den Gesichtspunkt des Bewusstseins geltend macht: „Sollen wir nun die eigentliche Quelle der Intensität in irgend einer Substanz finden, so wird diese nicht das Solide, als welches schlechthin nur ausgedehnet ist, sondern die Kraft sein, welche an sich Grade haben und schwächer sein kann. Auf diese können wir auch die Empfindung der Intensität reduciren, welche sich uns nach der Verschiedenheit der Sinnen- und Empfindungsnerven unter mannichfaltigen Bildern zeiget, in Ansehung aller aber, wenn sie über einen gewissen Grad geht, die Empfindung des Schmerzens erwecket. Auch in dem Gedankenreiche hat z. E. die Stärke der Aufmerksamkeit mit den Fibern des Gehirnes eine genaue Verbindung, und ist mit diesen stärker und schwächer."[2]) Sehen wir vorerst von dieser psychologischen Nutzanwendung ab, so finden wir das Intensive zu dem Kraftbegriff in Beziehung gesetzt, und diese Beziehung wird in dem folgenden Paragraphen bestimmter noch, in fortgesetzter Polemik gegen Baumgarten, an dem Urbeispiel dieses Begriffs gedeutet: „Hingegen würde die Geschwindigkeit der Veränderung ehender eine Art von Intensität abgegeben haben, weil die Kräfte, die sie hervorbringen, kräftiger, impetuoser, stärker wirken." Aber auch hier bemerken wir bei dem Mathematiker Lambert nicht das Einsetzen des Unendlichen in das zu betimmende Intensive. Und diese Einsicht lässt auch das Schlusscapitel seiner Architektonik vermissen, welches von dem Endlichen und Unendlichen handelt. Dagegen drängt sich die Bedeutung des Intensiven an der Empfindung und dem Bewusstsein in den Vordergrund, welche bei Leibniz bereits hervorgetreten war und als unmittelbare empirische Beziehung in dem Stärker- und Schwächerwerden der Empfindung sich geltend machte.

Hiernach ist der Ausdruck (19) einzuschränken: Differential und intensive Grösse bleiben, durch den Grad vermittelt, im Zusammenhang: aber die „Gleichwerthigkeit" scheint durch die Beziehung auf das Bewusstsein verdrängt zu werden.[3])

[1]) Architektonik § 695. — [2]) ib. § 696. [3]) Vgl. übrigens 80 und 81.

77. Kants Beziehung des Intensiven auf Bewusstsein. — Die Hervorhebung der Bedeutung des Intensiven für das Bewusstsein, und insbesondere für die Empfindung, um dieselbe apriorisch zu machen und damit zu realisiren, bezeichnet die Stellung, welche Kant zu unserm Begriffe einnimmt. Um nun einerseits das Neue und systematisch Werthvolle in Kants Auffassung der intensiven Grösse zu erkennen, andererseits aber auch das Mangelhafte in der Begründung und Darstellung, auf welches zuerst A. Stadler aufmerksam gemacht hat,[1]) somit also die ungenügende Klarheit und Sicherheit in der Disposition dieses Grundbegriffs, so muss man vorerst in Erwägung ziehen, welche nahe systematische Verwandtschaft zwischen dem Unendlichkleinen und der Empfindung besteht und wie für beide Probleme der Begriff der intensiven Grösse einzutreten und nutzbar zu werden scheint.

So lange diese Beziehung auf das Bewusstsein verborgen bleibt, so lange nicht erkannt wird, dass in dem Differential der kühnste Versuch gemacht wird, alles Fictive und Subjective, das in der Anschauung und der Zahl gelegen ist, zu überbieten und zu überwinden, und an dasjenige selbst unmittelbar heranzutreten, was das nicht blos vergleichsweise Sein der Dinge ausmacht; so lange man mithin in dem Unendlichkleinen nicht erkennt die fundamentale Anlage der Realität, und damit den ersten Ansatz zu derjenigen Objectivirung, welche durch den Substanz- und Kraftbegriff ausgerüstet wird: so lange bleibt die selbständige erzeugende Bedeutung des Differential wie der Fluxion im Unklaren.

An Kants Gebrauch dieses Begriffs hat man ein deutliches Beispiel für diesen Sachverhalt. In seiner ersten Schrift vom Jahre 1747 „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte“ gründet er die Schlichtung des Streites über das Kräfte-Maass auf den Gedanken, dass die „Intension“ lediglich die „Bestrebung“ sei, demnach also die lebendige Kraft nicht bedeuten könne, von welcher die Trägheit vorausgesetzt werde. Trägheit aber sei ein Begriff der Naturlehre, welcher die Intension im „Innern des Körpers“ begründe. Die Intension selbst dagegen sei ein Begriff der Mathematik. So

[1]) Grundsätze der reinen Erkenntnisstheorie in der Kantischen Philosophie 1876. S. 144 f. Philos. Monatshefte 1880, X, 583 f. „Das Gesetz der Stetigkeit bei Kant.“

wird also in dem reinen Begriffe der Intension das mechanische Motiv noch nicht erkannt, kraft dessen aus der Intension die Beschleunigung hervorzugehen vermag. Denn so wenig wie die Beschleunigung, kommt die Intension selbst „von draussen", sondern bezeugt und begründet an sich Realität. Diese Bedeutung des Intensiven als Realität ist aber hier noch nicht erkannt, damit der Begriff des Intensiven noch nicht zur Präcision gebracht. Es schwebt noch die scholastische Unbestimmtheit über diesem Begriffe oder die Zweideutigkeit, die seine Repräsentation durch die einfache Monade behaftet. Für diese Abhängigkeit der Realitäts-Bedeutung des Intensiven von der Beziehung auf Bewusstsein und Empfindung spricht auch die desshalb beachtenswerthe Thatsache, dass Kant die Methode des Unendlichkleinen mit der des Untheilbaren als gleichbedeutend ansieht. „Wenn man sich diese Linien ... unendlich nahe denkt, so werden sie nach der Methode des Unendlichkleinen, die Cavalerius in die Messkunst eingeführt hat ..."[1]) Der Unterschied des Unendlichkleinen von dem Untheilbaren liegt in der That erst in der positiven realisirenden Bedeutung des Differential-Begriffs, welche aus den letzten Gründen des Bewusstseins entspringt.

Für Kant gab es nun eine besondere Veranlassung, an dieser Beziehung des Intensiven auf Bewusstsein und Empfindung festzuhalten, weil sie ihm die Möglichkeit gewährte, innerhalb des Bewusstseins die Empfindung als Art desselben von der Anschauung als einer andern Art zu unterscheiden, und den Beitrag, den eine jede derselben für den Gehalt und Werth der Erkenntniss liefert, zu bestimmen. Damit aber ist die Gefahr entstanden, die Realität nicht für die Empfindung, sondern in der Empfindung zu begründen.

78. Kants Unterscheidung von Empfindung und Anschauung. — Beachten wir vorerst die Wichtigkeit der terminologischen Unterscheidung von Empfindung und Anschauung, die in dieser Bestimmtheit der Durchführung ein durchaus originaler und systematisch bestimmender Zug der Kantischen Kritik ist. Die Anschauung wird zunächst in Raum und Zeit für die Sinnlichkeit definirt. In diesem Sinne ist die Raum-Anschauung das Erkenntniss-Fundament der Geometrie der Lage, wie die Zeit betrachtet werden kann innerhalb der Sinnlichkeit als Fundament für die Zahl und für die Dynamik.

[1]) W. W. ed. Rosenkranz V. 152.

Dagegen macht der erste synthetische Grundsatz die Anschauung in der weiteren Beziehung geltend, welche auf der Verbindung mit dem Denken und dessen Begriffen beruht. Das Princip oder der Grundsatz der Axiome der Anschauung begründet zugleich die metrische Geometrie, wie Maass und Zahl überhaupt und damit Grösse. In dieser Verbindung von Anschauung und Denken, welche der schematische Grössenbegriff darstellt, errichtet sich der erste Grundsatz oder die erste und vornehmste Legitimations- und Constitutions-Instanz der synthetischen Erkenntniss, der Erkenntniss des Gegenstandes. Als Grösse, welche auf Maass und Zahl beruht, welche in der gleichartigen Erzeugung der Einheiten besteht, muss sich zu allernächst der Gegenstand erheben. Nicht blos historisch ist die Zahl der erste wissenschaftlich fruchtbare Ausdruck für die Substanz der Dinge.

So wird die Anschauung nach dem in ihr gelegenen erzeugenden Motive für die vorzugsweise und in Erster Instanz die Objecte garantirenden Wissenschaften charakterisirt; und diese Beleuchtung wird nirgend zerstreut nach dem verführerischen Seitenwege der Empfindung. Während nicht überall bei Kant der Unterschied von reiner und empirischer Anschauung sicher und lehrhaft vorsichtig durchgeführt ist, zeichnet die Darstellung des ersten Grundsatzes, wie ähnlich die Sätze der transscendentalen Aesthetik in der zweiten Auflage der Kritik grosse Bestimmtheit in dieser Richtung aus. Um reine Sinnlichkeit zu bestimmen, muss reine Anschauung gewonnen, muss der Vergleich mit aller Empfindung ferngehalten werden. Der Raum, welcher rein angeschaut wird, wird nicht empfunden. Durch diese erkenntnisskritische Bedeutung des psychologischen „Hirngespinnstes" vom Raume erledigen sich alle jene Discussionen über die Raum-Vorstellung, die freilich als solche das Element der Empfindung in sich enthält, ja auf demselben sich gründet. Die reine Raum-Anschauung dagegen ist dasjenige Element erkenntnisskritischer Abstraction (21), welches in der Verbindung mit dem Denken zum ersten mathematischen Grundsatze sich ausbaut. So rechtfertigt sich die Vermeidung der Empfindung bei der Auswerthung der Anschauung und ihrer Apriorisirung.

Indessen haben wir ja durchgängig das Fictive beachtet, das in der Anschauung allein liegt, sofern auf ihr Zählen und Messen beruhen. Mit alledem wird nur ein Vergleichen er-

zielt mit jener hypothetischen Einheit, an die an- und aufgelegt wird, was als Grösse erstehen will. Jene Einheit selbst aber, was wäre sie anders als die Einheit, welche überhaupt Alles erzeugt und Alles gewährleistet, auf die alle Beziehungen und Gegenstände zurückgeführt werden müssen: die Einheit des Bewusstseins. Diese nun steht zwar für einen jeden Grundsatz, da sie als transscendentale Apperception die Zusammenfassung, der Gattungsausdruck aller einzelnen Arten von Kategorien und Grundsätzen ist. So steht sie freilich auch für den ersten Grundsatz der Grösse, aber dieser selber fordert seine Ergänzung. Denn die Grösse ist eben nicht nur extensive oder Anschauungs-Grösse.

Diese Ergänzungs-Bedürftigkeit zeigt der Begriff der Einheit, insofern derselbe kein erschöpfend genaues Maass in sich enthält und abgiebt. Man kann ja an der umgekehrten Betrachtung des Verhältnisses von Zahl-Einheit und Einheit des Bewusstseins den unverweigerlichen Fortgang zu einer präciseren Einheit erkennen: jene Zahl-Einheit kann nicht schlechthin als Einheit des Bewusstseins gelten. Die letztere hat zu jener extensiven Zahl-Einheit noch eine andere, strengere, das Vergleichungsverfahren in der Erzeugung der Grösse tiefer erfassende Einheit zu entfalten. Wir haben hier davon abzusehen, wie bestimmt eine solche Vertiefung der Einheit den mathematischen Forschungen selbst und ihren Entwicklungen zu Grunde liegt, wie die ganze Zahl durch die Division zur gebrochenen wird, und wie aus den rationalen Brüchen die irrationalen hervorgehen: die arithmetische Vorstufe des Intensiven.

Kant dagegen musste sich die bestimmtere und vollere Beziehung, welche in der geforderten intensiven Grösse für das Bewusstsein, und als Art der Einheit desselben liegt, in den Vordergrund stellen, wie wir ja bei Leibniz schon und bei Lambert diese Bezugnahme auf Bewusstsein und Empfindung gefunden haben. Jetzt wird in der That die Berücksichtigung der Empfindung unabwendlich. Wenn wir unter Einheit nicht nur die extensive verstehen wollen, nicht nur die in einem willkürlich angenommenen Vergleichungsanfang bestehende, so können wir der Beziehung auf die Empfindung nicht ausweichen. Denn Empfindung gerade bezeichnet das Unbeschreibliche des Bewusstseins, aus dessen Gründen

wir doch allein jene tiefere Einheit für Zahl und Maass schöpfen können. Das schlechthin Innere, welches dennoch als das Objectivirende verwendet werden muss, liegt zwingender in der Empfindung, als in der Anschauung — wenn es nur gleich dieser gereinigt und apriorisirt zu werden vermöchte. In der Anschauung konnten die Alten Kegelschnitte construiren, auf deren Anwendung in der Natur der Dinge sie nicht rathen konnten. In der Empfindung dagegen meinen wir ausdrücklich und von vornherein ein Objectives zu setzen; nicht in dem Sinne, dass unsere Organisation dasselbe ausstrahlte, wie jene Gebilde der reinen Anschauung. In der Empfindung erscheint der Inhalt anspruchsvoller als ein gegebener. Und diese Ansprüche scheint diejenige Einheit befriedigen zu können, welche die extensive überwindet. So verbinden sich beide Desiderate, das nothwendige Hinausgehen der Anschauung zu einer Reinheit der Empfindung, und der in der extensiven Zahl-Einheit vermisste Abschluss: in dem zweiten Grundsatz, der in der intensiven Grösse die Empfindung realisiren soll.

Es darf jedoch nicht verschwiegen werden, dass durch die Verbindung dieser Tendenzen die Bedeutung der intensiven Grösse zweideutig geworden ist. Es ist dadurch der Schein entstanden, als ob in der Empfindung, nicht für dieselbe, die Realität gegründet und bestimmt würde. Diese Gefahr hat Kant selbst gesehen, wie sie zumal in der ersten Auflage der Kritik der reinen Vernunft nicht vermieden wurde, in welcher der Grundsatz der Anticipationen der Wahrnehmung dahin formulirt war: „In allen Erscheinungen hat die Empfindung und das Reale, welches ihr an dem Gegenstande entspricht, eine intensive Grösse, d. i. einen Grad". Dieses und hat die zweite Auflage verbessert: „In allen Erscheinungen hat das Reale, was ein Gegenstand der Empfindung ist, intensive Grösse". Allein auch hier bleibt der Schein, als ob das Reale, insofern es ein Gegenstand der Empfindung sei, intensive Grösse hätte. Und diesen Schein bestärken die Schlussworte dieses Beweises: „eine intensive Grösse zukommen, welcher correspondirend allen Objecten der Wahrnehmung, sofern diese Empfindung enthält, intensive Grösse d. i. ein Grad des Einflusses auf den Sinn, beigelegt werden muss". [1]) Der Grad ist indessen eine Bestimmung nicht sowol der Empfindung, als

[1]) Kritik der reinen Vernunft, ed. Kehrb. S. 162 f.

vielmehr des reinen Denkens, und nur als solche des Denkens übertragbar auf die Empfindung, um diese in dem Grade zu apriorisiren.

79. Die intensive Grösse und das Infinitesimale bei Kant. — In der Exposition und Erörterung dieses Grundsatzes fehlt es indessen nicht an Bemerkungen, welche, wenngleich nicht zwingend, so doch wahrscheinlich die Annahme machen, dass Kant unter seinem Terminus der intensiven Grösse denselben Gedanken verstanden habe und haben wolle, zu welchem bereits Galilei mit jenem Terminus hingestrebt, den Leibniz, der Vollender jenes Gedankens, mit diesem Terminus bezeichnet hat, und den wir bei Wolf, Baumgarten und Lambert wenigstens im Zusammenhang mit jenem gefunden haben.

Wir wollen in dieser Abhandlung nicht des Näheren auf die Frage eingehen, wie Kant in seinen verschiedenen Schriften, insbesondere in den „Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft" das Unendlichkleine als die intensive Grösse behandelt und benannt habe. Nur Eine Stelle sei aus der genannten Schrift angeführt: „Erklärt man aber eine doppelte Geschwindigkeit dadurch, dass man sagt, sie sei eine Bewegung, dadurch in derselben Zeit ein doppelt so grosser Raum zurückgelegt wird, so wird hier Etwas angenommen, was sich nicht von selbst versteht, nämlich: dass sich zwei gleiche Geschwindigkeiten ebenso verbinden lassen als zwei gleiche Räume, und es ist nicht für sich klar, dass eine gegebene Geschwindigkeit aus kleineren und eine Schnelligkeit aus Langsamkeiten ebenso bestehe, wie ein Raum aus kleineren; denn die Theile einer Geschwindigkeit sind nicht ausserhalb einander, wie die Theile des Raumes, und wenn jene als Grösse betrachtet werden soll, so muss der Begriff ihrer Grösse, da sie intensiv ist, auf andere Art construirt werden, als der in der extensiven Grösse des Raumes."[1]) Hier sehen wir die Erzeugung der Geschwindigkeit als intensive Grössenart vorausgesetzt und recipirt, und somit die unendlichkleinen Grössen als intensive gedacht und bezeichnet.

Wie wir nun aber ebenso schon bei Galilei und be-

[1]) W. W. S. 338.

stimmter bei Leibniz die Priorität des Intensiven vor dem Extensiven, das will sagen, die Nothwendigkeit der Ableitung und die Ableitbarkeit des Letztern aus dem Erstern betont fanden, so beruft sich Kant in seiner ersten Schrift vom Kräfte-Maass auf diesen Leibnizischen Satz: Est aliquid praeter extensionem, imo extensione prius.[1]) Und diesen Gedanken nimmt ein Fragment auf, das aus seinem Nachlass veröffentlicht ist, und als ein Anzeichen gelten kann, wie viel des Wichtigsten und Aufschlussreichsten uns noch vorbehalten sein mag. „Man muss daher das Moment der Geschwindigkeit nicht schon selbst als Geschwindigkeit betrachten, sondern blos als das Bestreben, einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit mitzutheilen; nicht als extensive, sondern als intensive Grösse, die aber den Grund der extensiven Grösse enthält. Man darf aber auch nicht sagen, das Moment der Geschwindigkeit sei Null, weil sonst durch die Summirung derselben keine endliche Grösse entstehen würde."[2])

Es ist zu vermuthen, dass er dies im Hinblick auf Euler niedergeschrieben habe. Und wir erkennen somit, dass die Auffassung des Unendlichkleinen als einer besonderen, nämlich der intensiven Grössenart, nicht als einer Unterart der extensiven Zahlgrösse mit dem Kunstgriff der Null, seiner durchgängigen Ansicht entsprach, die er mit gleichzeitiger Benutzung anderer und in der That zusammenhängender Motive in dem Grundsatz der Anticipationen zum systematischen Ausdruck gebracht hat. Nur konnte er diese Identificirung beider Begriffe nicht nachdrücklicher betonen zu müssen fühlen, da ihm für diese Ansicht der Sprachgebrauch bis von der scholastischen Zeit her entgegenkam. Vielmehr galt es Kant, den Schwerpunkt in den Begriff der Realität zu legen. Dieses Verhältniss der Begriffe musste ihm als das neue erscheinen; denn wie sehr auch dieses bei Leibniz schon eingeleitet war, so kam doch jetzt erst, als Kategorie gedacht, die Realität zu ihrer genauen und abgezweigten Geltung, durch welche die mit dem Realen verflochtene Einfachheit der Monade abgehalten wurde. Freilich brachte es diese Kategorien-Bedeutung der Realität zugleich mit sich, dass dadurch die Bedeutung des

---

[1]) W. W. V. S. 18. Vgl. oben S. 71. — [2]) XI. a, S. 270.

Intensiven in die Empfindung verschoben wurde, da sie ja als eine Art der Einheit des Bewusstseins, als Kategorie zur Entdeckung gekommen war.

Diese beiden Motive müssen, in ihrer systematischen Wurzel erkannt, vorerst auseinander gehalten werden, um alsdann um so lebendiger in ihrer Vereinbarung erkannt werden zu können. Diese Auseinanderhaltung, wie die Vereinigung der Motive des Intensiven, streben wir hier an. Zunächst wollen wir nun aber anführen, wie bereits innerhalb der älteren Kantischen Schule die Auffassung der intensiven Grösse als der unendlichkleinen hervorgetreten und geltend gemacht worden ist — jedoch ohne dass darin zugleich die Bedeutung der Realität erkannt oder hervorgehoben worden wäre. In dieser Verbindung allein aber kommt das Princip zum Durchbruch.

80. Bendavids Intension und Qualität. — In erster Linie dürfte hier nun Lazarus Bendavid zu nennen sein, der in seinem „Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathematischen Unendlichen“ (1789, 2. Aufl. 1796) zwar nicht viel vom Kantianer verräth, ausgenommen etwa, dass er die Unterscheidung zwischen extensiver und intensiver Grösse als bekannt voraussetzt. Vielleicht hat er aber diese Unterscheidung selbst nicht als eine Kantische Neuheit angesehen, wie aus einer Anführung hervorgehen dürfte, die für seine Auffassung des Problems charakteristisch ist. Er geht nämlich aus von dem Unterschiede, der zwischen Lage und Maass, zwischen Quantität und Grösse bestehe. Die Geometrie behandele die absoluten Eigenschaften, wie Lage, die Arithmetik dagegen nur Verhältnissbegriffe. „Für den Geometer ist daher Privation des Begriffs Grösse noch nicht Privation des Begriffs Quantität, am wenigsten aber alles Begriffs.[1]) Er fragt nun aber nach dem Unendlichen, sofern es ein Gegebenes der Arithmetik sei, jedoch durch Maass und Zahl sich nicht construiren lasse: „was ist es denn? Wodurch bekommen wir einen Begriff von demselben? Wieso lässt sich damit rechnen?“ Und er antwortet: „Dieses sind die Fragen, die man seit den Zeiten des Galilaei zu verschiedenen malen aufgeworfen hat; und seit dieser Zeit hat die Rechnung des Unendlichen ungemeine Fortschritte gemacht.“[2]) Er erkennt

[1]) Versuch, 2. Aufl., S. 41. — [2]) ib. S. 21.

also die Differential-Rechnung im geschichtlichen Zusammenhange mit Galilei. Und demgemäss bezeichnet er auch, ohne Andeutung, dass er dabei den Sprachgebrauch zu ändern oder zu präcisiren unternehme, die unmessbare Quantität getrost als Qualität[1]), und ferner ebenso unter der Hand und beiläufig, aber mit vollem und wiederholtem begrifflichen Nachdruck als „intensive Eigenschaft".[2]) Auch findet sich der den Spiess umkehrende Gedanke: dass die endliche Grösse als Product aus einem unendlichkleinen und einem unendlichgrossen Factor zu betrachten sei[3]) und „dass Unendlichkleines zum Endlichen dasselbe Verhältniss habe, wie dieses zum Unendlichgrossen". So sehen wir hier die Intension wie die Qualität für das Unendlichkleine in Anwendung.

81. E. G. Fischers Zurückführung auf das Vorstellungsvermögen. — Denselben Sprachgebrauch glaubt der vortreffliche transscendentale Einsicht bekundende Berliner Physiker Ernst Gottfried Fischer einzuführen, der in zwei Schriften unser Problem behandelt hat, zuerst in der „Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis nebst einer idealischen Uebersicht der Mathematik und Naturkunde nach ihrem ganzen Umfang" (1808). Auch Fischer beginnt mit einer historischen Skizze, beschliesst dieselbe aber nach damaliger Auffassung echt Kantisch: „Das Resultat aus allem Bisherigen dürfte folgendes sein: Der Begriff des Unendlichen und seine besondere Bestimmung als Differential ist keine willkürliche Erfindung, die man beliebig annehmen oder verwerfen könnte. Er muss vielmehr nothwendig aus dem Wesen unsrer Vorstellung entspringen."[4]) Und so hofft er, dass man auch an seinem Versuche das Bestreben bemerken werde, „über das Wesen unseres Vorstellungsvermögens selbst, womöglich, zu deutlichen Begriffen zu gelangen."[5])

Indessen bleibt doch auch Fischer bei der Euler'schen Consequenz stehen, dass $dx = 0$ sei. Demgemäss bezeichnet er es als die „eigentliche Fundamental-Operation der Differential-Rechnung", dass sie auf einen eigenen aber streng richtigen Ausdruck für die Endgrenze einer Function führe."[6]) Und

---

[1]) Versuch 2. Aufl., S. 44. — [2]) ib. S. 48, 52, 53, 61. — [3]) ib. S. 88. — [4]) Untersuchung, S. 142. — [5]) ib. S. 143. — [6]) ib. S. 150.

er hält diese Ansicht zwar in der Hauptsache für einerlei mit derjenigen von Leibniz, während er Newtons Ausweichung vor dem Unendlichkleinen für „Künstelei“ erklärt; aber Leibnizens Begriff einer unendlichkleinen Veränderung sei doch „ein undeutlicher und daher schwankender Begriff, die Vorstellung einer Endgrenze hingegen ein völlig bestimmter, und im Gebiete räumlicher Grössen sogar anschaulicher Begriff, der ... auf den ersten Grundgesetzen unseres Vorstellungsvermögens beruht“.[1]) Er definirt demgemäss: „Das Differenzial einer veränderlichen Grösse ist ihre Endgrenze, symbolisch vorgestellt als ein verschwindender Endtheil“.[2])

Aber an dieser auch nur symbolisch betrachteten Indifferenz von Endgrenze und Endtheil scheint er doch nicht festhalten zu wollen; denn neben der anschaulichen Grösse, neben dem bei einem Kantianer verwunderlichen Vorzuge eines „anschaulichen Begriffs“ erkennt er die Unentbehrlichkeit eines begrifflich und principiell Nichtanschaulichen, wobei er, ohne ihn zu nennen, auf Lambert zurückgeht. „Ich erinnere mich, öfters gehört und gelesen, und ehemals selbst geurtheilt zu haben, dass es uns an einer Mathematik des Intensiven fehle. Gegenwärtig halte ich dieses Urtheil für ungegründet. Das Intensive ist an und für sich nicht anschaulich ... es ist folglich ein Gegenstand der allgemeinen Mathematik (so nenne ich den ganzen arithmetischen Theil der Mathematik); diese aber erstreckt sich auf alle intensiven Grössen ebensowohl als auf die extensiven. Was uns in Ansehung der intensiven Grösse fehlt, ist mehr der Maassstab als die Methode ihrer Behandlung ... für einige Arten haben wir auch diesen z. B. für Masse, specifisches Gewicht, bewegende oder beschleunigende Kraft ... bei andern z. B. der Wärme, der Lichtstärke etc. sind wir nahe dabei ... ob wir je ein Mass für Geisteskräfte finden werden, lässt sich nicht sagen.“[3])

Er vermisst nun ausser dem Maass ferner noch eine deutliche Kenntniss der „reinen Denkform“, die der Vorstellung des empirisch Intensiven zum Grunde liege, und „findet und bezeichnet diese als „Ineinander“.[4]) Das Verhältniss des nur denkbaren, nicht anschaulichen Ineinander aber zum Nebeneinander

---

[1]) Untersuchung, S. 179. — [2]) ib. S. 180. — [3]) ib. S. 156. — [4]) ib. S. 161.

bestimmt er seiner Endgrenze gemäss dahin, dass „das extensive Verhältniss bei dem Verschwinden der Extension in ein intensives übergehe“.[1]) Somit ist die Endgrenze nicht mehr „sogar ein anschaulicher Begriff“, sondern man kann dabei „an kein extensives Verhältniss denken“, es kann hier nur ein „inneres oder intensives“ angenommen werden.[2]) In der That sind hier alle Bedingungen zur Entstehung eines intensiven Verhältnisses vorhanden. „Die innere Möglichkeit aber, zwei verschwindenden Grössen ein intensives Verhältniss beizulegen, beruhte im Grunde darauf, dass eine Grösse, die in einer gewissen Beziehung Nichts ist, auch bei jeder beliebigen Vervielfältigung in eben dieser Beziehung Nichts bleibt, dass aber dennoch jede Vervielfältigung an sich eine wirkliche Vermehrung in der Vorstellung, d. h. eine wirkliche Vorstellung von einer intensiven Grösse ist.“ Hier sehen wir die Intension auf ihre Bedeutung für das Bewusstsein beschränkt, nicht als auf ihre Illustration durch dasselbe bezogen: ohne als Realität geltend gemacht zu werden, kann das Intensive nicht zu seiner Bedeutung gelangen. Daher argumentirt Fischer im letzten Grunde psychologisch: man könne sich der intensiven Grösse nicht entschlagen; „denn wir treffen sie unausweichlich in der Wirklichkeit und in unserem eigenen Vorstellungsvermögen“.[3]) Das wichtigere Moment, durch welches er sich über psychologische Betrachtungen erhebt, ist die wiederholte, aber nicht systematisch eingeführte Berufung auf das Gesetz der Stetigkeit.

82. Das Unendlichkleine als Bestandtheil der Stetigkeit. — Dieser Recurs wird klarer und bestimmter in der zweiten diesem Gegenstande gewidmeten Schrift Fischers Ueber das Unendlichkleine und die Atome.[4]) Hier wird die innere Verbindung des Unendlichkleinen mit dem Princip der Stetigkeit zum Ausdruck gebracht. „In dem Begriffe der Stetigkeit ist also in der That schon der Begriff des Unendlichkleinen als ein Bestandtheil, nur ursprünglich ohne Bewusstsein gedacht.[5]) Der Cavalleri'sche Gedanke der Untheilbarkeit erscheint ihm daher als Einmischung eines „ganz falschen“

---

[1]) Untersuchung, S. 165. — [2]) ib. S. 189. — [3]) ib. S. 190. — [4]) Zwei Abhandlungen der Berliner Academie aus den Jahren 1828 und 1829, S.-A. 1831. — [5]) ib. S. 30.

Begriffs, ebenso wie die Exhaustions-Methode nur ein „Schleifweg“ war, der den Begriff des Unendlichkleinen nur „umging und verhüllte“. Die Nothwendigkeit dieses Begriffs beruht indessen auch hier auf der psychologischen, in günstigster Auslegung metaphysischen, aber eben nicht transscendentalen Ansicht, dass derselbe „in keinem menschlichen Vorstellungsvermögen fehlt noch fehlen kann.[1]) Demgemäss definirt er hier den reinen Begriff einer intensiven Grösse dahin: „dass in einem Punkte etwas vorstellbar sei, was in sich selbst wachsen und abnehmen kann“.[2]) Es „liegt in unserer Denkkraft a priori das Vermögen, das Ineinander zu denken“. So denken wir die Congruenz in der Geometrie. Wenn wir Punkte in Einen Punkt zusammenfallend denken, so ist für die Anschauung nur Ein Punkt da, „für den Verstand aber bleibt es eine Anzahl von Punkten, die nicht neben einander, sondern in einander, also in der Form einer intensiven Grösse gedacht werden“.[3])

Von hier aus gelangt Fischer zu wichtigen Einsichten über die Bedeutung des Intensiven auch für die Anschauung, für die Geometrie, bezüglich des Begriffs der Krümmung, die nun nicht mehr als extensive Grösse gedacht wird: „Wenigstens kann man nur sagen, sie liege auf der äussersten Grenze zwischen dem Extensiven und Intensiven, und nehme an den Eigenschaften beider Theil“.[4]) Dennoch aber behält er die Auffassung des $dx = 0$ bei, und nimmt in einer förmlichen Definition keinen Anstoss an der Gesellung der Begriffe Null und intensive Grösse, weil er zwischen einer absoluten und einer relativen Null unterscheidet. Die relative Null hebe nur das äussere Mass auf. „Der Werth Null .... heisst eine unendliche Grösse, sofern man vermöge des Begriffs von x und des Zusammenhanges, in welchem es mit andern Grössen gedacht wird, genöthigt ist, demselben eine bestimmte intensive Grösse beizulegen.[5])

Es gründen sich demnach die Regeln, die aus dieser Ansicht für die Differential-Rechnung abgeleitet werden, im letzten Grunde doch auf die Euler'sche Nullification, und die neue intensive Grössenart wird somit in ihrer logischen Bedeutung vereitelt. Das Sonderbarste ist nun aber, dass dieser ausgezeich-

---

[1]) Zwei Abhandl. der Berl. Academie, S. 31. — [2]) ib. S. 38. — [3]) ib. S. 39. — [4]) ib. S. 48. — [5]) ib. S. 40.

net besonnene Denker, der auf seinen Zusammenhang mit Kant mit Vorliebe hinweist, bei diesem seinem Problem denselben gänzlich und ausdrücklich verkennt. „Ueber das Wesen des Extensiven hat uns zuerst Kant einen befriedigenden Aufschluss gegeben. Ueber das Wesen des Intensiven ist mir wenigstens keine ähnliche Untersuchung bekannt.“ [1]) Für die innere Geschichte der philosophischen Probleme ist diese Aeusserung von instructivem Interesse.

Auf Fischers Erklärung ist neuerdings Freyer als auf die definitive Lösung des Problems in einer Schrift [2]) zurückgegangen, welche, sowol sachlich die Ahnung des Richtigen enthält, wie zugleich das Interesse der historischen Orientirung in anerkennenswerther Weise bethätigt. Die Bedeutung des Intensiven für das Extensive ist hier getroffen; es fehlt nur das Verständniss des Zusammenhanges des Intensiven mit der Realität.

83. Fries, Apelt, Herbart. — Auf Fischer bezieht sich auch schon Jacob Friedrich Fries, indem er $dx = 0$ setzt. „Die Null ist nämlich ein Zahlzeichen, wodurch ein Verhältniss einer zu messenden Grösse bestimmt wird, wie dies Fischer vorzüglich klar entwickelt hat.“ [3]) Und der Satz $dx = 0$ hat ihm „eine bestimmte analytisch-syntaktische Bedeutung“. „Das Differential ist keine Fiction, sondern nur eine Abstraction, ein mathematisch allgemeiner Begriff.“ [4]) Eine metaphysische, oder gar transscendentale Bedeutung wird somit als einem Vertreter intensiver Realität dem dx nicht beigemessen. Diese Einsicht in den Realitäts-Charakter des Unendlichkleinen musste ihm verschlossen bleiben, weil er das Gesetz der Stetigkeit lediglich als ein „Gesetz der reinen Anschauung“ ansah, und „nicht aus Begriffen“. „Es gebietet uns, wenn wir Grössenverhältnisse der Natur auf Begriffe bringen wollen, nicht die Stetigkeit aus Begriffen abzuleiten (nicht die Grösse aus angeblich kleinsten Theilen zusammenzuzählen, oder eine Begebenheit aus kleinsten Veränderungen zu summiren), sondern umgekehrt unsere Begriffe so zu ordnen, dass sie das Stetige zu fassen vermögen.“ [5]) Die Stetigkeit be-

[1]) Zwei Abhandl. der Berl. Academie, S. 60.

[2]) Prof. Dr. Freyer, Studien zur Metaphysik der Differential-Rechnung; Abdruck aus d. Osterprogramm der Klosterschule zu Ilfeld a. H. 1883.

[3]) Die Math. Naturphilosophie. 1883. S. 278. — [4]) ib. S. 277. — [5]) ib. S. 272.

zieht sich ihm also auf Raum und Zeit, und vermittelst derselben auf die Veränderungen in der Natur. Das Differential ist demgemäss eine Abstraction, um der Anschauung des Stetigen begrifflich zu entsprechen. Diese Interpretation möchte für die logische Charakteristik des Infinitesimalen allenfalls ausreichen; aber sie lässt eine Lücke in der erkénntnisskritischen Constitution der Natur, die allein durch die Realität ausgefüllt wird, welche ihrerseits Stetigkeit voraussetzt.

Ein klares Verständniss von der Bedeutung der Infinitesimal- Rechnung wie auch von ihrer geschichtlichen Vermittelung durch die allgemeinen Probleme bekundet auch E. F. Apelt, der übrigens wie sein Lehrer Fries die Stetigkeit auf die „Natur unserer mathematischen Erkenntniss" zurückführt.[1])

Auch Herbart hat ein treffendes Wort in der Erinnerung gesprochen, „dass Differentiale nicht zu verwechseln sind mit dem Aneinander im Raume. Denn jedes Aneinander ist ein wirkliches Element des Raumes; es ist also unvergleichbar mit Differentialen, die nur das Wachsen und dessen Regel, keineswegs aber wirkliche Theile der gewachsenen Grösse, anzeigen. Kein Integral ist, streng genommen, eine Summe von Differentialen."[2])

84. Die metaphysische und die psychologische Kritik des Infinitesimalen. — In unserm Jahrhundert und Zeitalter ist die Begründung des Differentialbegriffs vielfach unternommen worden. Aber in keiner der diesem Problem gewidmeten Untersuchungen, soweit ich derselben habhaft werden konnte, ist der Gedanke der Realität als Motiv und Problem erkannt worden, weder in dem vorkritischen Sinne von Galilei und Leibniz, noch vollends in demjenigen Kants. Ueberall hat man entweder in metaphysischen Speculationen oder in intern-mathematischen Entwickelungen die Begründung versucht.

Die metaphysischen Begründungsversuche gehen auf Hegel zurück, der man möchte sagen zum Grunde seiner Logik eine Kritik des Infinitesimalbegriffs gemacht hat. Diese Kritik, so fehlerhaft und falsch sie ist, enthält dennoch manchen tieferen Gedanken, als man in derselben nach Schnuses Blosstellung vermuthen sollte. So ist schon die Hervorhebung der

---

[1]) Die Epochen der Geschichte der Menschheit. I. S. 271 ff.; vgl. Theorie der Induction, S. 25 f.

[2]) Allg. Metaphysik, 2. Theil, WW. IV S. 195.

Qualität oder „des qualitativen Quantitäts-Moments“ [1]) für das Infinitesimale von principieller Wichtigkeit. Der Unterschied endlicher Grössen ist „in die einfache Intensität zusammengesunken“. [2]) Indessen — so sehr es gegenüber der allgemeinen Ansicht betont werden muss, dass Hegel um das Verständniss und um die geschichtliche Orientirung der höhern Analysis sich weit mehr bemüht, als man nach jenen Anführungen Schnuses glauben sollte, — so kann doch hier auf diese hunderte von Seiten umfassende Darlegung nicht näher eingegangen werden, weil sie auf philosophischen Voraussetzungen beruht, die uns fern liegen, ferner als die philosophischen Ansichten von Descartes und Leibniz. Denn diese Männer sind zugleich die Miterzeuger der sachlichen Erkenntniss, und die Vorbildner der Erkenntnisskritik. Bei Descartes und ebenso bei Leibniz müssen wir daher die Entstehung der Geltung studiren, welche bei Kant für das Verhältniss von Mathematik und Naturwissenschaft festgesetzt wird.

Hegel dagegen sagt: „Aber die Mathematik vermag überhaupt nicht Grössenbestimmungen der Physik zu beweisen, insofern sie Gesetze sind, welche die qualitative Natur der Momente zum Grunde haben; aus dem einfachen Grunde, weil diese Wissenschaft nicht Philosophie ist, nicht vom Begriffe ausgeht, und das Qualitative daher, insofern es nicht lemmatischer Weise aus der Erfahrung aufgenommen wird, ausser ihrer Sphäre liegt“. [3]) Dagegen haben wir nun gesehen, dass die Mathematik die Qualität nicht aus der Erfahrung aufgenommen hat, noch aufnehmen konnte, und dennoch dieselbe nicht schlechthin von der Philosophie des Begriffs zu empfangen hatte. Die Qualität als Realität gedacht, ist zugleich ein Beispiel für den Unterschied von sogenannter Begriffs-Philosophie und Erkenntnisskritik. Nicht vom Begriffe, sondern vom Grundsatze muss ausgegangen werden. Diesen jedoch legt die Wissenschaft dar.

Wenn also der grosse Streit um die Methode nicht zu einem Wortstreit werden soll, so kommt es darauf an, das Factum der mathematischen Naturwissenschaft anzuerkennen. Zu dieser Anerkennung genügt jedoch keineswegs, noch verhilft

---

[1]) Wissenschaft der Logik WW. III. S. 306. — [2]) ib. S. 322. — [3]) ib. S. 326, vgl. S. 352 ff. Anwendung auf Mechanik.

es zur klareren Orientirung, die Naturwissenschaft als „blossen Durchgangspunkt“ zu bezeichnen.[1]) In dem Unterschiede von Factum, dessen gedankliche Voraussetzungen zu entdecken sind, und „Durchgangspunkt“ (zu welchem Andern?) liegt der Unterschied der transscendentalen und der metaphysischen Methode.

Auch in andern Erörterungen ist der Begriff der Qualität, weil er nicht als Realität gedacht wurde, erkenntnisskritisch nicht zu selbständiger Bedeutung gehoben worden, obschon die Beziehungen der Qualität zur Quantität und Intensität in einzelnen dieser Ausführungen getroffen und gezeichnet sind. Dies gilt namentlich von den auf Hegel'schem Grunde stehenden Entwickelungen von Hermann Schwarz,[2]) während die Erklärungen von O. Schmitz-Dumont noch mehr im Formal-Logischen stehen bleiben.[3])

Dieser Mangel an Einsicht in die Bedeutung des selbständigen Begriffs und Grundsatzes der intensiven Realität kennzeichnet auch die Bemühungen von E. Dühring in Bezug auf unsere Frage. Er bleibt in der Hauptsache bei der „Denk- und Vorstellungsthätigkeit“ stehen,[4]) und setzt sonach einen Unterschied von „Thatsachen der Natur“ und „Nothwendigkeiten unseres blossen Denkens“. In der Aufklärung, die er dem Infinitesimalen zu Theil werden lässt, scheint er uns daher gegen Windmühlen zu kämpfen, da uns in der ganzen Literatur nichts Beträchtliches aufgestossen ist, was die Betonung der Binsenwahrheit forderte und lohnte, welche Dühring als die „rationalisirte Gestalt“ bezeichnet, die er diesem Begriffe seit 1861 gegeben habe: „Das Unbeschränkte darf in der Mathematik immer nur den Sinn der ungehinderten Möglichkeit des gedanklichen Vermehrens oder Verminderns, also des Häufens oder Einschaltens, des Vervielfältigens oder Theilens haben; andernfalls wird es zu einer logischen Chimäre“.[5]) Aber auch diese „rationalisirte Gestalt“ sei nur dann zulässig, wenn das „sogenannte Stetige als ein Wirkliches in eine Zusammensetzung von Theilen“ aufgelöst werde. Hier hat sein falscher Grund-Begriff

[1]) Günther Thiele, Grundriss der Logik und Metaphysik, 1878, Vorwort.

[2]) Versuch einer Philosophie der Mathematik, 1853, vgl. besonders S. 85, 86, 88, 90, 98, 99.

[3]) Die math. Elemente der Erkenntnisstheorie, 1878, vgl. S. 257.

[4]) Logik und Wissenschaftstheorie, 1878, S. 255. — [5]) ib. S. 268.

der „bewusstlosen Wirklichkeit“,[1]) der durch die Realität nach ihrem Verhältniss zum Dasein erledigt ist, zu der trivialen rationalistischen Auffassung des Infinitesimalen geführt, dem ein Wirkliches entgegengestellt wird.

Diese die idealistische Erzeugung des Infinitesimalen nicht begreifende Ansicht zeigt sich bereits in der ersten diesem Gegenstande gewidmeten Schrift Dührings. Gegen La Grange macht er dort[2]) den Unterschied geltend: Infinite parva esse non supponimus, sed sancimus. Aber er scheint dennoch einen Unterschied in der Sanction zwischen diesem und andern rein mathematischen Begriffen anzunehmen, indem er fortfährt: Si quis recentius exemplum suppositionis entis inter quantitatem et absentiam quantitatis intermedii quaerat, introductionem libri Poisson ... inspiciat ... ubi propter continuitatem temporis ejus quantitatem per gradus quovis dato minores crescere concluditur. Continuitatem vero agnoscere et omnino gradus incrementorum admittere plane contradictorium est. Nun ist aber gerade dieser Begriff des Grades keineswegs ein „neueres Beispiel“, sondern das alte classische Prototyp des Unendlichkleinen, der Erstling jener schöpferischen „Metaphysik“, welche durch ihre „Suppositionen“ die bisherigen Grundlagen der extensiven Mathematik bereichert, und durch die Errichtung der intensiven Realität vertieft hat.

85. Die mathematische Begründung. Cournot. — Die intern-mathematische Begründung liegt, ausser sofern sie in der Grenz-Methode im Allgemeinen getroffen werden kann, ausserhalb unserer Competenz und unseres Anliegens. Denn eigentlich mathematische Ausführungen, die den Differential-Begriff als eine Definition aufstellen, gehören der allgemeinen Functionentheorie an, und können nur innerhalb derselben so geprüft wie geleistet werden.

Des entgegengesetzten Fehlers hat sich neuerdings Paul Du Bois Reymond schuldig gemacht, der in einer Allgemeinen Functionentheorie in breiten Erörterungen einer Art von „Erkenntnisstheorie“ sich ergangen hat, welche jedoch hier nicht berücksichtigt werden können, weil von den Mängeln und Schwächen der Ausführung abgesehen, jene „Erkenntniss-

[1]) Logik und Wissenschaftstheorie S. 159 ff. — [2]) De Tempore, Spatio, Causalitate atque de Analysis Infinitesimalis Logica, 1861, p. 107.

theorie" mit dem, was wir als Erkenntnisskritik definirt haben, nicht übereinkommt. Von dem Mathematiker aber sei angeführt: „Noch heute erscheinen in der „unfehlbarsten aller Wissenschaften" kaum zwei Lehrbücher hintereinander, die, wenn sie auf die Grundbegriffe näher eingehen, nicht auf das Schroffste sich widersprächen. Hinsichtlich ihrer Begründung ist demnach die Lehre von den Differentialen seit Leibniz .. kaum vorgeschritten."[1])

Dagegen hat sich der Mathematiker und Philosoph Cournot dem erkenntnisskritischen Standpunkte in der Würdigung des Infinitesimal-Begriffs mit grosser Bestimmtheit genähert, indem er sowol die Fluxions- wie die Infinitesimal-Methode klar und tief erkannt hat, wenngleich die feine und richtige Schlussbemerkung bezüglich des Unterschiedes zwischen der Schärfe oder der Strenge der Begriffe und ihrer logischen Definition einer genauern Fassung bedarf: „In allen den Fällen, wo der Newton'sche Begriff auf Grössen angewandt wird, welche sich wirklich mit der Zeit ändern, gewährt derselbe den Vortheil, die reelle Bedeutung der abgeleiteten Functionen zu bestimmen, und eben dadurch gleich zum Voraus den Grund der Rolle anzugeben, welche sie bei den Anwendungen der Analysis auf die Untersuchung der Naturerscheinungen spielen müssen. Newton hat auf diese Weise die Theorie der Functionen auf einen Begriff zu gründen gesucht, welchen der Geist direct fassen kann, ohne durch die Betrachtung der Grenzen zu gehen, und ohne einen Weg einzuschlagen, welcher bis zu einem gewissen Punkte unnatürlich und indirect ist. Er verstand die Stetigkeit in der Veränderung der Erscheinungen ... direct auszudrücken. Auch hat man nach D'Alembert den Einwurf gemacht, dass man zur Definition einer beständig veränderlichen Geschwindigkeit sich immer der Betrachtung der Grenzen bedienen müsse; allein man hat bei diesem Einwurf die Schärfe der Begriffe irrigerweise ihrer logischen Definition untergeordnet."[2])

Demgemäss tadelt Cournot die Ansicht des La Grange von der Metaphysik des Infinitesimalcalculs, und tritt der Meinung von der Künstlichkeit desselben entgegen. „Uebrigens bildet die Infinitesimal-Methode nicht blos einen geistreichen Kunstgriff,

---

[1]) Die allgemeine Functionentheorie I. S. 133 f.

[2]) Theorie der Functionen, übersetzt von Schnuse, S. 41 f.

sondern sie ist der natürliche Ausdruck der Entstehungsart physischer Grössen, welche nach Elementen wachsen, die kleiner sind als jede endliche Grösse. . . . Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, hat man mit Recht sagen können: dass die unendlichkleinen Grössen in der Natur existiren, und man könnte bei dieser Vorstellungsart sehr passend die Function f'(x) die erzeugende oder ursprüngliche Function und f(x) die abgeleitete Function nennen, statt diese Benennungen in einem umgekehrten Sinne anzuwenden, welches La Grange, von rein algebraischen Betrachtungen geleitet, gethan hat." [1])

Ebenso hat sich Cournot in seinem philosophischen Hauptwerke ausgesprochen. Das dx sei keineswegs eine abstraction artificielle, sondern eine rationelle: „elle s'adapte directement au mode de génération des phénomènes naturels et à l'expression de la loi de continuité, qui les regit". [2]) Auch hier ist der Ausdruck zwar noch zu verbessern; der Gedanke selbst jedoch ist zulänglich gedacht, um die Tendenz des Begriffs logisch zu bezeichnen. Das Infinitesimale adaptirt sich nämlich nicht nur dem Ausdrucke des Gesetzes der Continuität, sondern es ist dieser Ausdruck selbst. Und sofern das Gesetz der Continuität die natürlichen Phänomene regiert, so ist es schon eine figürliche Wendung, wenn man sagt: das Infinitesimale adaptire sich der Erzeugungsweise der natürlichen Phänomene; denn es ist vielmehr das Einzige Mittel, diese Erzeugungsweise zum mindesten darzustellen. Der erkenntnisskritische Zusammenhang von Sein und Erkennen, von Natur und Erfahrung lässt uns begreifen, dass es kein anderes Mittel giebt, diese Erzeugungsweise zu denken, kein anderes also, die natürlichen Phänomene selbst gesetzmässig zu erzeugen, als diese „rationelle" und „natürliche Abstraction". Wie sollte man diejenige Abstraction nicht als die natürliche benennen, welche die Natur in erster Instanz als reale constituirt.

Wir beschliessen hier unsere historische Skizze, und wenden uns nunmehr zu den Consequenzen unserer Auffassung des Differentials als intensiver Realität für das erkenntnisskritische System.

---

[1]) Cournot, Theorie der Functionen, übers. von Schnuse, S. 49 f. vgl. S. 114.

[2]) Essai sur les fondements de nos connaissances, I, p. 423; cf. p. 331.

III. Ausführungen.

86. Verhältniss der Elemente im Grundsatz. — Die Rücksicht, welche bei der Charakteristik je eines Grundsatzes auf alle andern mitzunehmen ist (13), hat sich zugleich zu erstrecken erstlich auf die beiden Arten von Elementen, welche in jedem derselben verbunden sind, und ferner auf das Verhältniss, welches innerhalb derselben Art zwischen den einzelnen Bestimmtheiten derselben besteht. Der einzelne Grundsatz kann nämlich nicht nur entweder die sinnlichen oder die Denk-Elemente prägnant, sondern, obzwar ein Grundsatz als solcher keiner von beiden Arten gänzlich entrathen kann, dennoch etwa die Gegebenheit bestimmter in der Zeit fixiren, als in dem Raume, oder das Denk-Bewusstsein mehr in der Continuität als in andern Denk-Gesetzlichkeiten darlegen. Dies ist der Fall der intensiven Realität.

Darin besteht die Bedeutung der Realität für das System der Erkenntnisskritik, und zwar sowol für das Fundament wie für den Abschluss desselben (13): dass sie erstlich das Verhältniss von Sinnlichkeit und Denken und ferner das Verhältniss von Raum und Zeit zu einander und zu den Denk-Elementen zu genauerer Bestimmung bringt. Erst in dieser Abgrenzung und Unterscheidung der einzelnen Beiträge, die Anschauung und Denken zum Grundsatz liefern, kann die Bedeutung des letztern als einer Grundlage und Voraussetzung des Erkennens vollkommen durchsichtig werden.

87. Raum und Denken. — Man hat sich seit Kants transscendentaler Aesthetik gewöhnt, Raum und Zeit als die selbständigen, unentbehrlichen, und in der Rangordnung der Erkenntnissbedingungen den Ersten Platz behauptenden Mittel und Grundlagen zu betrachten. Es liegt mir fern, dieser Ansicht entgegentreten zu wollen; indessen, wenn sie mit ihrem Nutzen nicht zugleich Schaden anrichten soll, so bedarf sie der Einschränkung und Ergänzung. Der Schaden nämlich

wäre unvermeidlich, wenn man der Sinnlichkeit abschliessende Geltung einräumen wollte; wie andererseits das Denk-Gebilde überspannt wird, wenn die sinnliche Gegebenheit ausser Beziehung bleibt. Jenen Schaden in der Ueberschätzung der Raum-Anschauung illustrirt die Discussion der Metageometrie, welche darin unleugbares Recht hat und Nutzen bringt, dass sie den Zusammenhang von Denken und Anschauung betont, und das Denken in die Anschauung einflechten zu dürfen und zu müssen behauptet. Auch das noch sei als Anschauung zu betrachten, hebt Helmholtz hervor, was mit den Mitteln des Denkens der Anschauung zugeführt werde, wenngleich es derselben unzugänglich bleibe. Darin liegt in der That nicht blos geometrisch, sondern auch erkenntnisskritisch ein richtiger Gedanke, dem nur der naive Glaube an die sinnliche Realität widerstreben kann. Dieser Gedanke ist aber nicht etwa lediglich durch moderne Errungenschaft der Erkenntnisskritik angehörig, sondern es ist eben der Kantische Gedanke selbst. Jene die sogenannte Metageometrie betreffenden Erörterungen verrathen daher ihr Missverständniss von der Bedeutung des synthetischen Grundsatzes darin, dass sie ausschliesslich die wenigen Sätze vom Raume in der transscendentalen Aesthetik verhandeln, den Grundsatz der Axiome dagegen gänzlich ausser Betracht lassen.

Dahingegen lehrt uns die Realität zur intensiven Grösse ausgedacht: dass Raum und Zeit nicht die letzten und definitiven Voraussetzungen der realen Dinge seien; dass sie vielmehr ihrerseits ebensosehr der Voraussetzung der Realität bedürfen, wenn anders räumliche Gegenstände und zeitliche Vorgänge in ihnen sich darstellen sollen; obzwar sie freilich nicht minder nothwendig sind, um hinwiederum die Realität zum Dasein zu ergänzen (32). Somit gewinnt das Infinitesimale als Vertreter der intensiven Realität eine entscheidende Bedeutung für die Basirung wie für den Abschluss des kritischen Idealismus.

88. Der erkenntnisskritische Idealismus. — Die Einsicht in die solide Wissenschaftlichkeit des kritischen Idealismus wird durch das Verständniss zweier Momente bedingt, die gleichsehr constitutiv sind, aber nur schwer zusammen berücksichtigt werden. Einerseits muss der constructive Charakter des Denkens im Vordergrunde bleiben: dass die Welt der Dinge auf dem Grunde der Gesetze des Denkens beruht; dass die Dinge nicht schlechthin als solche gegeben sind, wie sie auf unsere

Sinne einzudringen scheinen; dass vielmehr die Grundgestalten unseres denkenden Bewusstseins zugleich die Bausteine sind, mit denen wir die sogenannten Dinge in und aus letzten angeblichen Stofftheilchen zusammensetzen, und die Normen, mit denen wir die Gesetze und Zusammenhänge jener entwerfen und als Gegenstände wissenschaftlicher Erfahrung beglaubigen. Das ist das Bestimmende der Idee im Idealismus: keine Dinge anders als in und aus Gedanken.

Aber daraus entsteht der Schein des Subjectivismus: dass die Dinge nur Ideen, nicht ausserhalb der menschlichen Gehirne in selbsteigener Gegebenheit ihres Daseins mächtig wären. Es hilft dagegen wenig, wenn man die Sinnlichkeit als dem Denken ebenbürtige Erkenntnissquelle einsetzt; und es hat Kant wenig geholfen, dass er in dieser Richtung seinen Unterschied von den dogmatischen Idealisten bestimmt hat: dass auch die Sinne a priori anschauen könnten, das hätten Jene sich nicht einfallen lassen. Selbst diese kräftige Differenz hebt den Einwand nicht auf. Denn auch die Macht der Sinnlichkeit zerschellt an dem Vorwurf des subjectiven Idealismus. Gerade weil und sofern auch die Sinne a priori Anschauung gewähren, erscheinen auch die den Sinnen sich offenbarenden Dinge als Spiegelbilder und Ausgeburten jener apriorischen Anschauungsformen.

Wenn daher die Sinnlichkeit gegen den Uebermuth des Denkens eine einspruchsfreie Instanz bilden soll, so darf dieselbe zu allererst nicht als Reizquelle für die Empfindungen in unserer Lebenserfahrung angenommen werden; denn diese bildet eben das grosse Fragezeichen. Auch darf die reine Sinnlichkeit nicht dahin verstanden werden, dass sie, von empirischem Inhalt unbehelligt, auszustrahlen vermöchte, was irgend Wirklichkeit in der Welt der Dinge behaupten mag. An diesem Missverständniss der reinen Anschauung, der reinen Sinnlichkeit, als ob sie alles Inhalts frei und ledig wäre, während sie doch gerade als Form allen Inhalt, die synthetische Möglichkeit alles Inhalts einschliesst — an diesem Irrthum scheitert alle Bemühung, Kants transscendentale Aesthetik zu erfassen. Alle Discussion ist hohl und fruchtlos, die sich um die Meinung dreht, die Sinnlichkeit solle nach Kant letztlich die Form unserer Subjectivität sein — während doch vielmehr der Schwerpunkt deutlich und bestimmt in der transscendentalen Erörterung liegt: dass der Raum die Bedingung der Geometrie sei.

Das ist das zweite Moment, welches den kritischen Idealismus als solchen kennzeichnet. Das erste Moment nämlich, die Ableitung der Dinge aus den Gesetzen des denkenden Bewusstseins bildet das genus des Idealismus. Die Hinzunahme des sinnlichen Bewusstseins bezeichnet nicht hinreichend den Unterschied des kritischen vom dogmatischen Idealismus: die differentia specifica liegt erst und ausschliesslich in dem Hinweis auf die Wissenschaft, in welcher allein Dinge gegeben und für die philosophischen Fragen angreifbar vorhanden sind: nicht am Himmel sind Sterne gegeben, sondern in der Wissenschaft der Astronomie bezeichnen wir diejenigen Gegenstände als gegebene, welche wir von, wenngleich ernstlich gemeinten, Erzeugungen und Bearbeitungen des Denkens als in der Sinnlichkeit gegründet unterscheiden. Nicht im Auge liegt die Sinnlichkeit, sondern in den raisons de l'astronomie. Das bedeutet Descartes' classisches Beispiel von der Sonne.

Durch diese Auffassung des transscendentalen Motivs bestimmt sich nun nicht allein die specifische Differenz des Kriticismus, sondern damit zugleich der Oberbegriff des Idealismus. So wenig die Sinnlichkeit die der menschlichen Leibesbeschaffenheit ist, so wenig ist auch das Denken das natürliche, willkürliche, noch auch ein künstliches, welches wie der gesunden Bildungen so auch aller sophistischen Verrenkungen fähig ist; sondern es ist lediglich dasjenige, welches als das legitime Mittel des Erkennens sich bewährt. Das denkende Bewusstsein ist somit eine Stufe und Abstraction des erkennenden Bewusstseins.

Das erkennende Bewusstsein aber liegt als ein erforschbares Factum nicht etwa in den psychologischen Ansichten von unserer sogenannten physio-psychischen Organisation vor; sondern das erkennende Bewusstsein hat nur in der Thatsache der wissenschaftlichen Erkenntniss diejenige Wirklichkeit, auf welche eine philosophische Untersuchung sich beziehen kann, die aus dem Bewusstsein die Gegenstände der Natur abzuleiten sich erkühnt. Daher ist solche Untersuchung, die das Bewusstsein nicht in den persönlichen Individuen anspricht, sondern in der objectiven Wissenschaft: kritischer Idealismus, oder sie heisst transscendental, oder erkenntnisskritisch. Sie kritisirt die Möglichkeit und zwar die synthetische der wirklichen Erkenntniss (9).

89. Aenderung der Correlation von Sinnlichkeit und Denken. — Bei dieser Untersuchung der Möglichkeit des in der mathematischen Naturwissenschaft wirklichen Factums der Erkenntniss stellt sich der Begriff, das Denkgebilde der Realität als ein unentbehrliches Denk-Mittel dieser Erkenntniss heraus. Als ein Denk-Mittel aber betrachtet, muss die Realität alle Collision mit der Sinnlichkeit bestehen können. Die Einsicht, dass die Realität nothwendig sei für die Begründung der Erkenntniss, kann das Recht der Sinnlichkeit nicht irgendwie verkümmern; so wenig als die Gegebenheit sinnlicher Anschauung den Begriff der Realität entbehrlich macht. Und darin eben bethätigt sich die Realität für die Erzeugung und somit auch für die Charakteristik des kritischen Idealismus: sie zeigt nicht nur, wie ein solches Denkgebilde die Natur constituirt; sondern sie zeigt zugleich, dass nicht anders als nach der Eigenart ihres Beitrages für den Bestand der Erkenntniss auch die Sinnlichkeit nur geschätzt werden dürfe; und dass mithin nur in deren constitutivem Werthe, wenngleich in der Eigenart desselben, die Gegebenheit ihrer Gebilde bestehen könne.

Das ist der eminent idealistische Charakter der Realität: dass sie die Correlation von Sinnlichkeit und Denken bestimmter und durchsichtiger regelt. Sehen wir vorerst noch von der genaueren Bestimmung des Verhältnisses von Raum und Zeit zu einander ab, welche ebenfalls durch den Begriff der Realität erfolgt, so erscheint dies allein von unschätzbarem Werthe: dass die Realitäts-Bedeutung des Differentialbegriffs den naiven Realismus entwurzelt, insofern sie davon entwöhnt, dass zu allererst die sinnliche Gegebenheit als das Requisit objectiver Wahrheit gefordert werde (28—30).

Und diese Aenderung der Correlation von Sinnlichkeit und Denken entscheidet nicht etwa nur einen Rangstreit der apriorischen Elemente; sondern von ihrer Durchführung hängt das richtige Verständniss dieser Elemente als erkenntnisskritischer ab. Denn nicht etwa als psychologische Grundbeschaffenheiten des Geistes sollen sie genommen werden, sondern vielmehr als Bedingungen allein, aus deren Wirksamkeit und Geltung die der wissenschaftlichen Erkenntniss sich deduciren lässt. Ohne den Begriff der Realität nämlich wäre es nicht wol räthlich, anstatt der Sinnlichkeit das Denken zur Ersten Bedingung wissen-

schaftlicher Erkenntniss zu machen; und zwar nicht etwa nur aus Besorgniss vor Vergeltungs-Uebergriffen der gemeinen sinnlichen Ansicht, sondern ebensosehr aus Rücksicht auf den Thatbestand und den Hergang in der Erzeugung der Erkenntnisse.

Denn wenn man, ohne auf die Realität hinzublicken, die Ordnung der apriorischen Bedingungen umkehren, zuerst die Begriffe und dann die Anschauung setzen wollte, so würde man Gefahr laufen, die Bahn zu verlassen, die Descartes für alle Folge der wissenschaftlichen Philosophie gebrochen hat; man würde vergessen, dass zu allernächst den Grundgesetzen und den Grundgebilden reiner mathematischer Anschauung entsprechen muss, was in rerum natura existiren will. In diesem Sinne gehen Raum und Zeit den Kategorien voran, wie die Geometrie der Physik. Jetzt aber wissen wir, dass die Realität als das Postulat des Unendlichkleinen selbst in der Geometrie zum Durchbruch kommt. Mithin gehört auch die Realität zu den Voraussetzungen derjenigen Wissenschaft, welche man füglich die Wissenschaft vom Raume nennen darf — wobei man jedoch jene andere Voraussetzung miteinbegriffen denken müsste. Dieses Subintelligiren ist an sich ein verhängnissvoller Fehler, der nur durch klares Auseinanderlegen der latenten Nebengedanken gehoben werden kann. Die Realität ist an sich nicht sinnliche Gegebenheit, wie der Raum oder die Zeit. Das Unendlichkleine kann daher nicht blos nicht, es braucht auch nicht in endlicher Sinnlichkeit anschaubar zu sein. Der Raum involvirt also nicht die Realität. Nichtsdestoweniger aber macht sich die Voraussetzung der Realität bereits in der Geometrie geltend. Innerhalb der Geometrie selbst ist daher eine Verbindung von Anschauung und Denken anzuerkennen.

Diese Sonderung nicht identischer Begriffe sollte geläufiger sein in einer Zeit, welche die Geometrie des Maasses von der der Lage unterscheidet. Der Raum kann nicht einmal mehr für die Geometrie der Lage als völlig zureichende Bedingung betrachtet werden. Alle Gesetzmässigkeiten, welche der Name und Begriff des Raumes zusammenzufassen hat, beziehen und beschränken sich auf die Lagen-Verhältnisse. Aber diese selbst erheben in dem Unendlichkleinen die Forderung der Realität. Wo vollends die Strecke zum Vorschein kommt, da spielt der Grössenbegriff. Und als die nothwendige Erweiterung des Grössenbegriffs, sowol für die Geometrie, wie für die Arithmetik, wie

endlich für die Mechanik haben wir die Realität als intensive Grösse kennen gelernt. Für die Geometrie selbst ist daher die Realität als eine nothwendige Voraussetzung anzuerkennen und zu präcisiren.

Nunmehr also kann der idealistischen Forderung volle Genüge geleistet werden, indem der Aufbau derjenigen Elemente, welche objective Gültigkeit oder synthetische Erkenntnisse oder Erkenntnisse von den Gegenständen der mathematischen Naturwissenschaft bedingen, allenfalls auch mit dem Denk-Mittel der Realität begonnen werden kann, welches in das sinnliche Mittel der Raum- und Zeit-Anschauung sich hineinerstreckt. Und indem wir diese idealistische Consequenz ziehen, so dürfen wir jetzt nicht mehr fürchten, dem Subjectivismus zu verfallen: weil wir auf der Cartesischen Bahn verbleiben, weil wir die Reduction alles Wirklichen auf sein geometrisches Ideal in dieser Fassung des Realitätsbegriffs festhalten und vollführen. Indem wir uns über die nothwendige Voraussetzung der Realität schon für die Geometrie klar machen, so befestigen wir die Einsicht, dass aus dem Raume selbst im Ersten Grunde Alles abgeleitet werden müsse, was naturwissenschaftliche Geltung soll erlangen können. Somit bleibt uns der classische Gedanke, den Descartes in enthusiastischer Ueberspannung eingeführt hat, wegweisend.[1]) Somit bleibt die sinnliche Gegebenheit die apriorische Grundbedingung, wenngleich und gerade weil wir mit ihr verbunden erkennen dasjenige Element des reinen Denkens, ohne welches die geometrischen Idealgestalten nur Schemen wären, nicht die Schemata der Dinge der Natur. Die Nothwendigkeit der Durchdringung der Elemente der Sinnlichkeit mit den Elementen des Denkens wird somit an dem Begriffe der Realität einleuchtend.

90. Aenderung der Correlation von Raum und Zeit. — Aber nicht nur die Correlation von Sinnlichkeit und Denken wird solchermassen durch den Begriff der Realität geregelt, sondern auch die Correlation von Raum und Zeit wird durchsichtiger bestimmt. Wir sahen bei Galilei, wie die Räume aus den Zeiten entstehen (48). Die umschliessende Bedeutung der Zeit hat daher einen andern als blos psychologischen Charakter. Nicht blos als in der Form des innern Sinnes ist in der Zeit

[1]) Vgl. P. Natorp, Descartes' Erkenntnisstheorie 1882 u. a. S. 94.

Alles enthalten, was sich im Raume ordnet; sondern im Charakter der Gegebenheit dem Raume gleichwerthig, erscheint die Zeit noch mehr als der Raum diese Gegebenheit zu erzeugen, sofern vornehmlich in die Zeit-Anschauung der Realitätsbegriff eingreift.

Die Zeit ist das gleichförmige Urmaass. Daher wird sie zum Träger der Continuität. Continuirlich hinwiederum ist die Zeit, sofern in ihr das Unendlichkleine oder die intensive Realität sich erzeugt. So regulirt diese das Verhältniss von Raum und Zeit zu einander, wie zu den Denkmitteln des Erkennens.

91. Reine und angewandte Mathematik. — Dieses idealistische Zeugniss, welches die Realität ablegt, befördert zunächst die klare und correcte Fassung des Unterschiedes von reiner und angewandter Mathematik. In dieser Hinsicht spricht sich auch bei den mathematischen Forschern selbst bisweilen nicht volle Klarheit aus. Nicht nur dass in neuerer Zeit noch Versuche gemacht werden, von dem Empirismus aus als von einem abschliessend berechtigten systematischen Standpunkte und im angeblich durchgeführten Gegensatze zum Idealismus die mathematischen Grundlagen zu entwickeln; sondern schon darin zeigt sich wunderliche Mangelhaftigkeit des Verständnisses, dass von einer reinen Mathematik gesprochen wird, als ob sie in einem Gegensatze zur angewandten stehen dürfte, oder eine entschuldbare Weile wenigstens es thun könnte. Indem wir den Begriff der intensiven Grösse oder der Realität der reinen Mathematik angehörig erkennen, so wird es vollständig klar, dass jener Unterschied nur methodisch zu verstehen ist.

Was innerhalb der reinen Mathematik erdacht wird, das hat damit den Charakter der Anwendbarkeit; denn nur das ist rein, was unter gegebenen Bedingungen anwendbar werden kann. Aber freilich dass diese Bedingungen gegeben werden, kümmert das Reine nicht. Daher scheint die Aenderung zutreffend, die Mathematik frei zu nennen.[1]) Nicht also wie nach Spielregeln erzeugt der mathematische Witz oder die mathematische Phantasie eine reine Mathematik; sondern in der Oekonomie unserer Erkenntnissmittel werden Raum-Gebilde erzeugt und Zahl-Gebilde, ohne dass von deren Anwendung auf Dinge der

[1]) Georg Cantor, Grundlagen einer allgem. Mannichfaltigkeitslehre, 1883, S. 19.

Natur ausgegangen wird. Aber je weniger der freie Mathematiker um diese Anwendung sorgt, desto gewisser darf er sein, dass, was er rein, das will sagen gesetzmässig ersinnt, dadurch gerade anwendbar ist, wieviele Jahrhunderte auch verstreichen mögen, bis solche Anwendung geleistet wird. Die Kegelschnitte gehören nach Kepler nicht weniger zur reinen Geometrie wie bei den griechischen Geometern; und schon bei diesen wohnte ihnen der Geltungswerth des auf die Natur Bezüglichen bei.

Die Unklarheit in dieser Frage liegt in der mangelhaften Einsicht von dem Verhältniss unserer wissenschaftlichen Mittel zum Ganzen wie zum Einzelnen der Natur. Die Natur ist ja doch nicht etwa an sich da und vorhanden, sodass auf sie unsere mathematischen Gebilde nur angewandt zu werden brauchten; sondern sie ist mittels derselben erst zu entdecken und zu erzeugen. Wären die Kegelschnitte nicht erdacht, so würden wir denjenigen Naturvorgang, den die Planetenbahnen bilden, nicht erkennen; mithin würde derselbe nicht anders denn günstigsten Falls als ein Problem, etwa das der Epicyklen vorhanden sein. Dieses Erzeugniss der reinen Geometrie ist mithin nicht auf die an sich vorhandene Natur der Planetenbahn, sondern zur Erzeugung jener Natur angewandt worden, die ohne jenes reine Erzeugungsmittel nur als Fragezeichen, nicht als beglaubigter Naturvorgang vorhanden war.

Und wie viel Natur mag gleicherweise versteckt oder gänzlich noch verborgen sein, für welche die reinen Erzeugungsmittel vielleicht schon erfunden sind. Vielleicht bedarf es nur der Anregung von Seiten anderer Probleme, um jene Anwendungskraft in dem schon vorhandenen Reinen zu erwecken; wie wir solche mehrfache Anbohrung bei der Entdeckung des Differentialbegriffs wahrgenommen haben. Vielleicht möchte überhaupt der Unterschied von reiner und angewandter Mathematik darauf hinauskommen, dass je mehr, je vielfacher, je inniger die mathematischen Methoden sich durchdringen, desto anwendungsfreier und reicher die reinen Gebilde werden. Das zeigt die Geschichte des Differentialbegriffs darin so ausnehmend deutlich, dass an diesem Begriffe die Reinheit erst in und mit der Anwendung nach manchem trübern Wellenschlage sich abgeklärt hat. Daher macht der Begriff der Realität die sachliche Indifferenz des Reinen und des Angewandten deutlich, indem

er kraft seines idealistischen Charakters den erzeugenden Werth des Reinen darthut.

92. Das Infinitesimale als Grund und Werkzeug des realen Gegenstandes. — Und damit kommen wir zu der Summe der Bedeutung, welche wir der Realität hier beimessen. Die infinitesimale Grösse, als Realität gedacht, wird zum idealistischen Hebel alles Naturerkennens. Es ist zwar eine überall gebrauchte Bezeichnungsweise, dass die Infinitesimalrechnung ein werthvolles Instrument der Naturwissenschaft sei; aber es will scheinen, als ob die volle Bedeutung dieses Ausdrucks nicht durchgängig zur Anerkennung gebracht sei. Nicht blos ein Hilfsmittel der Rechnung etwa ist das Infinitesimale, nicht ein künstliches Werkzeug, um physische Vorgänge zu berechnen, denen die gemeine Rechnung nicht gewachsen ist; sondern das natürliche Verfahren, demzufolge überhaupt Dinge und Vorgänge abgetheilt und specialisirt werden, führt in gerader Richtung, und in letzter Instanz zu diesem Gebilde, ohne welches die gewöhnliche Rechnungsart unzulänglich und im eigentlichsten Sinne gegenstandlos würde.

Denn alles Rechnen mit extensiven Zahlgrössen ist und bleibt ein Vergleichen mit dem relativen und willkürlichen Maassstabe der Einheit, welche selbst freilich in der Einheit des Bewusstseins ihre Gewähr hat, darum aber auch in anderen Arten dieser Einheit des Bewusstseins Ergänzung fordert und findet. Gäbe es nur die gemeinen Zahlen, so gäbe es nur Relativitäten; Dinge wären nirgends begründet. Das Unendlichkleine bedeutet als die intensive Grösse die Realität in dem bestimmten und prägnanten Sinne: dass sie das Reale, welches in aller Naturwissenschaft vorausgesetzt und gesucht wird, derselben darreicht; dass sie das Reale ausmacht und constituirt.

Das Infinitesimale ist daher Instrument des Naturerkennens in der Bedeutung des Organon, welches die Naturdinge erzeugt und bildet. Es ist nicht ein äusserlicher, mechanisch angesetzter Theil; sondern es ist das innerlich zugehörige Glied, durch welches ein einheitliches Ganzes hervorgebracht und verbürgt wird. In dem Unendlichkleinen wird als seinem natürlichen Elemente und Ursprung das Endliche gegründet, welches und sofern es wissenschaftlich objectivirt und bestimmt werden kann. Zur Bestimmung gehört aber, und somit auch zur Objectivirung die Rechnung. Mithin ist die Realitäts-Einheit oder die Er-

zeugungs-Einheit nicht etwa weniger als die gewöhnliche Zahlgrösse, sondern weit mehr als diese das eminent natürliche Mittel, die Objectivität zu bestimmen, weil sie allein das Endliche zu realisiren vermag. Aus dieser Bedeutung des natürlichen Hilfsmittels für die Constitution der Natur ergiebt sich ferner die Kritik eines der wichtigsten Naturbegriffe.

93. Die systematische Ueberschätzung der Atomhypothese. — Man darf vielleicht annehmen, dass der Gedanke der Atomistik eine Reaction war gegen den pythagoreischen Enthusiasmus von der Substanz der Zahl. Wie sehr dieser seinerseits eine förderliche Reaction gegen den Hylozoismus war, so überspannte er doch offenbar den unentbehrlichen Gedanken von dem Beitrag, den die Zahl zur Objectivirung leistet. Wir bedürfen der Zahl zur wissenschaftlichen Constituirung der Dinge; aber die Zahl bildet nicht das ganze und volle Sein der Dinge, sie ist nicht die *οὐσία* derselben. Gegen diese arithmetische Ueberhebung wandte sich Demokrit mit der Entdeckung der Atome oder Gestalten (*σχήματα* und *ἰδέαι*). Das Atom, als die Gestalt gedacht, vertritt somit zunächst das Recht der Geometrie gegen jene Zahlmystik.

Aber jene Gestalten sind zugleich doch auch schwer; sie sind als geometrische Gestalten mithin zugleich physikalische Körper. Das ist der Keim des cartesischen Irrthums, dass die Ausdehnung selbst Substanz sei. Und während bei Demokrit wie ähnlich bei Descartes der Schwerpunkt in der Reduction der Materie auf die Gestalten gelegen haben dürfte, so wird in der Entwicklung der Atomistik das Atom immer vordringlicher zum stofflichen Repräsentanten, nicht zum gedanklichen, etwa geometrischen Vertreter des Stoffes; es wird in materialistischer Weise zum Element und Samen des Materiellen.

Diese materialistische Atomistik, welcher schon Leibniz mit seiner Monade begegnen wollte, wird von der mathematischen Physik verworfen. Materielle Theilchen sind zunächst geometrische Punkte, an welchen dynamische Beziehungen verrechnet werden, und welche, sofern solche dynamische Beziehungen der Rechnung gemäss unter ihnen obwalten, zu materiellen Punkten und Theilchen werden. Denn die Theile sind die Punkte eines Systems; und die Punkte sind die

Theile eines Systems, in welchem von dem Abstand der Theile abgesehen wird.[1])

Somit ist kein wissenschaftliches Bedürfniss vorhanden, einen Massenpunkt als stofflichen zu supponiren. Mit Geometrie und Mechanik müssen wir auskommen — sofern die complicirteren Bedürfnisse der Chemie und gar der organischen Morphologie ausser Betracht bleiben. Der Massenpunkt ist ein geometrisch-mechanischer Punkt. Das ist eine Binsenwahrheit im Gebiete der theoretischen Naturwissenschaft. Aber es sollte zugleich alle Controversen über das Grenz-Verhältniss von Kinematik und Kinetik schlichten und erledigen; denn nur um die Hinzunahme weiterer gedanklicher Voraussetzungen kann es sich bei dem Kraftbegriff handeln; nur um das Geltendmachen solcher Voraussetzungen und über die Nothwendigkeit derselben sollte daher auch der Streit um die Einführung des Kraftbegriffs sich drehen.

Indessen betrifft diese Frage die Specialisirungen derjenigen synthetischen Grundsätze, welche der Relation zugehören, die der Substanz, der Causalität und der Wechselwirkung. Damit diese jedoch Platz greifen können, bedarf es, wie wir von vornherein gesehen haben, unseres Grundsatzes der Realität. Und so bethätigt sich darin die realisirende Bedeutung des Infinitesimalen, dass in demselben das in der Substanz-Analogie vermisste Fundament für das Reale gelegt wird (31). Die Substanz ist eben nur eine Proportion, also nur ein Ansatz, und ebenso die Causalität und die Gemeinschaft, die ihrerseits die Substanz zur Voraussetzung und Vorbedingung haben.

Ohne die Grundlage der Realität schwebt auch das „Correlat" der Substanz in der Luft der Analogie. Mit der Realität aber bedarf die Substanz nicht ferner des sinnlich individuellen Atoms, noch die Causalität der anthropomorphen oder sonstwie sinnlich materiellen Kraft. In den intensiven Grössen sind diejenigen Realitäts-Einheiten gewährleistet, an welchen dynamische Beziehungen gestiftet und durch Differentialgleichungen berechnet werden können. So beseitigt die Auffassung des Infinitesimalen als der alles Reale in sich

[1]) „Ein Körper, der so klein ist, dass für die Zwecke unserer Untersuchung die Entfernungen zwischen seinen einzelnen Theilen vernachlässigt werden können, wird ein materielles Partikel genannt." J. Clerk Maxwell, Substanz und Bewegung, deutsch von Ernst von Fleischl, 1879, S. 4.

darstellenden und aus sich erzeugenden Einheit die materialistische Atomistik und hebt die Schwierigkeiten, die mit der correcten Definition des Kraftbegriffs verknüpft zu sein scheinen.

94. Die unausgedehnten Punkte. — Um jedoch diese Frage, soweit sie uns in dem Zusammenhang unseres Problems berührt, in das rechte Licht zu rücken, dürfte es nützlich sein, eine Fassung dieser Controverse ausdrücklich abzulehnen, in welcher die Hebung der Schwierigkeit nicht durchgeführt werden kann. Es ist dies die Alternative: ob die letzten materiellen Punkte ausgedehnt oder unausgedehnt anzunehmen seien. In dieser Fragestellung steckt Unklarheit; und so kann auf dieselbe die Antwort nicht erschöpfend lauten. Diese Fassung des Gegensatzes rührt, wie wir in der Geschichte des Intensiven gesehen haben, aus der ursprünglichen Bedeutung desselben als des Inextensiven her. Während nun aber bei Galilei und bei Leibniz aus der Negation des Inextensiven kraft der Limitation das eminent positive Intensive sich entwickelt hat, so hat die scholastische Terminologie und Speculation bis in unsere Tage Vertreter und Vertheidiger bewahrt, die indessen alle auf den Jesuiten Boscovich zurückgehen dürften.

Joseph Boscovich hat in seiner Theoria Philosophiae Naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium[1]) ein continuum extensum bestritten und demgemäss auf puncta inextensa die gesammte Natur reducirt. Sein Versuch jedoch, die Principien von Newton und Leibniz zu versöhnen, leidet an der Negativität dieser unausgedehnten und untheilbaren Punkte: bei welcher die Einsicht in die realisirende Bedeutung des Intensiven nicht aufgehen konnte. Si enim prima materiae elementa sint puncta penitus inextensa et indivisibilia, a se invicem aliquo intervallo disjuncta; jam erit finitus punctorum numerus in quavis massa: nam distantiae omnes finitae erunt; infinitesimas enim quantitates in se determinatas nullas esse, satis ego quidem, ut arbitror, luculenter demonstravi et in dissertatione de Natura et Usu infinitorum ac infinite parvorum et in dissertatione de Lege continuitatis et alibi.[2])

[1]) Vgl. Moses Mendelssohns ausführliche Recension in den Briefen die neueste Litteratur betreffend. Ges. Schriften IV, a. S. 537—569.

[2]) Theoria Philosophiae naturalis editio Veneta prima 1763. p. 41.

Hier wird also einerseits ein Inextensum gesetzt, und anderseits ein Intervallum, mit welchem Letztern jedoch die Extension bereits gesetzt ist. Will man daher diesen Widerspruch principiell überwinden, und nicht erst nöthig haben, die Ausdehnung als eine Wirkung der mit den unausgedehnten Punkten verbundenen Kräfte anzunehmen, so gilt es, das Unausgedehnte limitativ zu fassen. Nicht der Ausdehnung baar und ledig, noch der Ausdehnung widerstreitend sind die Punkte, die man als die Fundamente der Materie, nämlich des Realen derselben anzunehmen hat; sondern als die Ausdehnung begrenzend, mithin derselben zugehörig. Das Inextensum muss gedacht werden als mit der Tendenz zur Ausdehnung begabt, kann daher aber nicht selbst ausgedehnt sein sollen; denn es soll diese Ausdehnung in und aus sich erzeugen. Das haben wir als die realisirende Kraft der intensiven Geschwindigkeiten erkannt, welche die Fallräume erzeugen. Das ist der Fortgang vom Inextensiven zum Intensiven, der sich kraft der Limitation vollzieht.

Das in solcher positiven Bedeutung gefasste Intensive ist also zwar räumlich wie zeitlich unbegrenzt, aber nicht unbestimmt; es hat vielmehr diejenige Kraft der Tendenz, von welcher wir bei der Tangente für die Erzeugung der Curve ein einleuchtendes Beispiel betrachtet haben. Diese positive Bedeutung der Tendenz liegt in der Realisirung. Wenn nun durch die Punkte die materialistische Atomistik geschlagen werden soll, so muss die Basis, die im Atom liegt, in die Realität verlegt werden. Die Realität aber darf nicht als unausgedehnt bezeichnet werden, weil sie als solche auch nicht ausgedehnt sein kann. Sie ist als das Intensive die nothwendige Ergänzung des Extensiven, und zwar eine Ergänzung, welche schon der Geometrie zu gute kommt, nicht allein der Mechanik, wie wir dies an dem Tangenten-Problem gesehen haben (39).

Es wird daher, streng genommen, nicht einmal die Unterscheidung von einem geometrischen und einem physischen Punkte ohne Einschränkung in diesem Sinne zu behaupten sein, da der Punkt nach den methodischen Aufgaben der Geometrie selbst Berührung nicht nur, sondern ausdrückliche Gemeinschaft mit denjenigen Aufgaben hat, welchen der physische Punkt im Weiteren genügt. Die Realität, wird man genauer zu sagen haben, welche bereits in dem Punkte der Geometrie ihre Wirk-

samkeit beginnt, vollendet und erfüllt dieselbe an den Problemen der Materie, die den Gegenstand der Physik bilden.

Dieselbe Paradoxie findet sich bei Saint-Venant, dem neueren Bestreiter des ausgedehnten Continuums. Il n'y a aucun lien logique nécessaire entre l'idée d'existence, même matérielle, et l'idée d'étendue.[1]) Schon diese Fassung des Gedankens ist irreführend. Zwischen Ausdehnung und materieller Existenz ist durchaus ein nothwendiges logisches Band — logisch im weiteren Sinne genommen — anzuerkennen, wenngleich, wie es eben in dem Gedanken des Bandes liegt, ein jedes der zu verbindenden Elemente von eigenkräftiger Bedeutung ist. Der intensive Punkt, der über die Ausdehnung hinaus anzunehmen ist, ist imo extensione prius (58, S. 71).

Auch der Ausdruck points sans étendue, den Saint-Venant gebraucht, ist ungenau. „C'est le système proposé il y a bientôt un siècle par un mathématicien distingué, le P. Boscovich, homme positiv et plein de bon sens, et le neutonien le plus conséquent qu'il y ait eu peut-être." Dieses historische Urtheil gerade ist es, welches hier sachlich bestritten wird: der Entdecker der Kategorie der Realität vielmehr ist der consequenteste Newtonianer. Als Kategorie gedacht, ist die Realität überhaupt nicht als Punkt zu betrachten, sondern nur in der nothwendigen Verbindung mit der reinen Anschauung kann die intensive Einheit der Realität oder der Erzeugungs-Grösse als Punkt gedacht werden. In dieser nothwendigen Verbindung der Elemente, welche eben Elemente der Verbindung sind, liegt die Berechtigung, von realen oder materiellen Punkten zu reden, nicht aber in dem grossen Worte, das die Vernunft gegen die Sinne, die Raison gegen die Imagination erheben dürfe. Denn die Vernunft schützt bekanntlich nicht gegen die dialektische Idee des Einfachen. Mit dieser Idee des Einfachen darf nicht verwechselt werden die Kategorie der Realität (51).

95. Ausdehnung und Masse. — Eine erhebliche Verbesserung dieser Problemstellung findet sich in dem vielcitirten

[1]) Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps; Bulletin de la société philomathique de Paris 20 Janvier 1844; ferner Annales de la société scientifique de Bruxelles 2e année; citirt bei Carbonelle, S. J., Les Confins de la science et de la philosophie I, 183 ff.

Passus des Schreibens von W. Weber an Fechner: „Es kommt darauf an, in den Ursachen der Bewegungen einen solchen constanten Theil auszusondern, dass der Rest zwar veränderlich ist, seine Veränderungen aber blos von messbaren Raum- und Zeitverhältnissen abhängig gedacht werden können. Auf diesem Wege gelangt man zu einem Begriff von Masse, an welcher die Vorstellung von räumlicher Ausdehnung gar nicht nothwendig haftet.“[1]) Diese Trennung der Begriffe Masse und Ausdehnung ist ein Symptom erkenntnisskritischer Abstraction, die sich auch in dem unmittelbar folgenden Gedanken zeigt: dass „consequenter Weise“ auch die Grösse der Atome nicht nach ihrer räumlichen Ausdehnung, sondern nach ihrer Masse zu bemessen sei.

Weber denkt demnach eine Art von Grösse, unterschieden von der extensiven, und vertheidigt somit thatsächlich die intensive Grösse; aber es erschwert zum mindesten das Verständniss der Sache, wenn dem Raume und der Zeit gegenübergestellt wird die Masse, welche doch nicht blos Bezug behalten muss auf die Ausdehnung, sondern mit derselben in ihrem eigenen Begriffe complicirt ist. Dasjenige Element, welches der räumlich-zeitlichen Ausdehnung ergänzend gegenübertritt, ist daher zum Behufe des Begriffs der Masse die intensive Quantität oder die qualitative Realität.

96. Fechners Unendlichkleines. — Diese nicht ganz glückliche und correcte Fassung wird jedoch von G. Th. Fechner keineswegs verbessert indem dieser auch als Stilist ehrwürdige Denker für Masse die Materie einsetzt. Denn auch hier vermissen wir die Realität, die vollständig dasjenige zu leisten vermögend scheint, wozu die Materie angenommen wird; während dieselbe nach ihrem allgemeinen Begriffe — und eine eigene Definition wird nicht gegeben — von Raum und Zeit viel zu tief durchdrungen bleibt, als dass sie einen passenden Gegensatz zu ihnen bilden könnte. Auch kann man aus Fechners Darstellung bequem erkennen, dass es der Begriff der Realität ist, auf den er hinsteuert; obschon er sein materielles und einfaches Atom hypostasirt. Die Einfachheit ist ihm äquipollent mit der Discontinuität, die ein integrirendes Merkmal seiner Atome bildet. Diese Frage indessen ist uns hier nicht so dringlich

[1]) Atomenlehre, 2. Aufl., S. 88 f.

angelegen, da wir die Continuität in der That erst in den Realitäts-Einheiten zu constituiren versuchen.

Sehen wir nun aber auch von der Hypostasirung ab, die wir erkenntnisskritisch nicht bedürfen, so nennt Fechner sein einfaches Atom ein unendlich Kleines: „es hypostasirt aber die letzte Grenze des Seienden in quantitativer Hinsicht, ist ein unendlich Kleines im strengsten Sinne“.[1]) „Der Punkt allein, der aber eben hiemit vielmehr die Grenze der Raumgrössen als selbst eine Raumgrösse bildet, . . . ist ein Unendlichkleines unendlicher Ordnung, und gestattet keinen endlichen Grössenvergleich mehr.“[2]) Hier ist also ganz in unserem Sinne das Unendlichkleine als das Fundamentale geltend gemacht; nur wird es dennoch Materie und Atom genannt: daher wird der Antagonismus von Atomistik und Dynamik nicht überwunden.

Dagegen streift Fechner sogar den Namen der Realität, indem er, vielleicht durch die Bezeichnung des Unendlichkleinen veranlasst, die Gleichsetzung von Materie und Zahl ablehnt. „Unstreitig besteht der Gegensatz von Discontinuität und Continuität zwischen Zahl einerseits, Raum und Zeit andererseits; nur tritt nicht die blos denkbare abstracte Zahl dem Raum und der Zeit als Ergänzung zur Realität in der Natur gegenüber.“[3]) Also auch die Zahl setzt das Reale voraus; damit aber zugleich auch das von Raum und Zeit unabhängige Realisirende in der Materie.

Fechner sucht nun zwar das Realisirende; jedoch nicht streng als eine gedankliche Voraussetzung, sondern als ein Daseiend-Seiendes. Nicht nach dem Antheil, den die Zahlen an der Objectivirung haben, forscht er, sondern nach den „realen Zahlen“ selbst; und das seien letztlich die einfachen Atome: „aus ihnen construiren sich endlich alle realen Zahlen, die Sternenheere selber, mit dem, was zwischen ihnen. Schön aber bleibt's, wie diese uns in der Nacht leuchtend über unseren Häuptern spiegeln, was in einer tiefern Nacht des Seins dem Auge unerkennbar wirklich ist.“[4])

Gemäss dieser Spiegelung des Wirklichen macht Fechner einen Unterschied zwischen dem Begriff des Messbaren, der sich „in Raum und Zeit rein hypostasirt“, und dem des Zähl-

---

[1]) Atomenlehre, 2. Aufl., S. 166. — [2]) ib. S. 167. — [3]) ib. — [4]) ib. S. 168.

baren, der sich „in unsern Atomen in reinster Weise real hypostasirt". Dagegen fällt uns das Zählbare wie das Messbare in den Begriff der extensiven Grösse, und zum Realen bedürfen wir der selbständigen Voraussetzung der Realität. Fechner sagt: „Das Zahlensystem der Natur hat nur eine Ziffer, das Atom, und reicht damit zu den Rechnungen des Alls".[1]) Dieses Gleichniss möchte an sich nicht zutreffend sein, weil es die Natur in einen bedenklichen Gegensatz zur Mathematik setzt, den Galilei in seinem bekannten Ausspruch abgewiesen hat: „Im Buche der Natur ist die Philosophie in mathematischen Charakteren geschrieben". Aber Fechner selbst hat sein Atom ein „Unendlichkleines unendlicher Ordnung" genannt. Mithin kann es nicht durch eine Ziffer ausdrückbar sein. Die unendlichen Ordnungen des Unendlichkleinen vielmehr sind die Realitäten, welche die Natur zu den „Rechnungen des Alls" gebraucht.

97. Form und Bestimmungspunkte. — Indessen dieses in der Hauptsache von Galilei herrührende Gleichniss wird besser vermieden, auf dass aus dem allgemeinen idealistischen Zuge der Naturphilosophie und Naturforschung der erkenntnisskritische Idealismus sich entwirren und fixiren kann. Es ist beachtenswerth, dass Fechner zur Charakteristik seiner Ansicht einen andern Ausdruck gebraucht, welcher auf das bestimmteste an die Kantische Terminologie erinnert. „Nach unserer Auffassung ist alle Materie des Körpers unmittelbar in Form aufgehoben, indem sie eben deren Bestimmungspunkte bildet."[2]) Mit welchen Mitteln aber vollzieht die „Materie" diese Bestimmung?

Wenn die Form die materielle Verworrenheit der Materie aufheben und resorbiren soll, so muss sie als Form diese Bestimmung geben und ausmachen. Dann wird man jedoch schwerlich von Bestimmungspunkten reden, woran immer doch die abgelehnte und bekämpfte Ansicht von den ausgedehnten Punkten haftet. Man erkennt diese Auffassung im Gegensatze: „nach der dynamischen Ansicht ist sie (sc. die Materie) in der Form nur wie in einem äussern Sacke enhalten". Wenn die Form in solcher Auskleidung nicht gedacht werden darf, wie ist alsdann die Bestimmung zu denken, welche die Materie zu treffen

[1]) Atomenlehre, 2. Aufl., S. 169. — [2]) ib. S. 174.

vermag? Das gerade ist die Frage. Wie sind die „Bestimmungspunkte" begrifflich zu bestimmen? Auch die Raum- und Zeit-Punkte treffen Bestimmungen und bilden somit Form; wie unterscheidet sich von dieser Art von Bestimmung und Form die sogenannte Materie?

Wir sehen, dass alle diese Erwägungen zu der Antwort drängen: Nur auf dem Wege der Unterscheidung von Denk-Elementen und sinnlichen oder Anschauungs-Elementen kann diejenige Richtung fixirt werden, welche Fechner gleich jenen anderen idealistischen Atomistikern mit Bewusstsein verfolgt. Die Realitäts-Einheiten sind die „Bestimmungspunkte" der Materie. Und diese Realitäts-Einheiten sind Denk-Einheiten, die als solche der Ausdehnung disparat sind, also mit derselben verbunden werden können. Diese Verbindung aber ist erforderlich, wenn die Probleme der Naturforschung gelöst werden sollen. Für diese Lösung werden Formen und Elemente des Denkens wie der Anschauung isolirt. In solcher Auffassung der Elemente bestimmt sich der erkenntnisskritische Idealismus.[1])

98. Methodischer Vorzug des Infinitesimalen vor dem Atom. — Erkenntnisskritisch verstehen wir daher den Begriff des Infinitesimalen als ein Beispiel des Grundsatzes der intensiven Grösse. Nicht zusammenfallend ist das dx mit der intensiven Grösse; denn das dx hat neben räumlicher Unbegrenztheit zugleich räumliche Tendenz (94); aber eine Art des Geltungsbegriffs der intensiven Realität ist das Unendlichkleine; und zwar nicht blos eine correctere, als etwa das Atom; sondern auch als die zureichende Bedingung für die Fundamentirung des Realen lässt sich der Infinitesimalbegriff über allen Zweifel erheben.

So gewiss es ist, dass in letzter Instanz alle Operationen für die Constitution des Materiellen und Realen auf der Infinitesimal-Analysis beruhen, so unzweifelhaft ist es demnach, dass in dem Differentialbegriff die Realität nicht blos gesetzt, sondern

---

[1]) Von diesem erkenntnisskritischen Idealismus sind die Erwägungen unterschieden, welche zu Gunsten eines Influxus hyperphysicus von Zöllner erneuert worden sind in Bezug auf die Interpretation der bezüglichen Ansichten von Newton und Cotes, Boscovich und Faraday, sowie von Kant. Zöllner war es versagt, den Raum, die Form und das Gesetz des reinen Raumes in der Tendenz des ds zu erkennen. Daher sein falscher Begriff der Fernewirkung. Wiss. Abhandlungen I. S. 65, 78.

zugleich gegründet wird. Denn der Begriff des Differentials ist die conditio sine qua non eines exacten Verfahrens, nicht schlechthin ein Abstractionsbild, wie das Atom, welchem das Maass seiner Brauchbarkeit für gewisse Rücksichten in der Constitution der Materie den Grad seiner jeweiligen Giltigkeit anweist. Das Differential unterscheidet sich von allen derartigen Abstractionen darin: dass es den fundamentalen Anfang und die letzte competente Instanz für alle diejenigen Operationen bildet, welche in dem Ziele sich vereinigen, die Erkenntniss von realen Vorgängen und Gegenständen zu erzeugen.

Möchte immerhin das Atom ein correctes Abstractionsgebild der Materie sein, so gehört es doch vornehmlich derjenigen Reihe von Reconstructionen an, welche das eingeschränkte Bereich der Chemie ausmachen. Diese Einschränkung wird als eine berechtigte zugestanden; aber sie setzt doch die Physik voraus, in deren weiteren Kreis sie einbezogen ist und bleibt, wie sehr auch zeitweise die Richtung der Methoden einen unabhängigen Gang der Forschung gebieten mag. Die moderne Auffassung gerade zeigt hinlänglich, wie in der mechanischen Wärmetheorie Physik und Chemie zusammengehen. Damit aber verlässt die Chemie die Ansicht von den verschiedenen Arten der Atome je nach der Verschiedenheit der chemischen Elementarstoffe, giebt vielmehr der Ansicht Raum, dass die Stoffe nach Art der Physik als Bewegungsvorgänge sich betrachten und untersuchen lassen; und so wird der stoffliche Gesichtspunkt des Atoms in den mathematischen und mechanischen eines „Kraftcentrums" umgelenkt.

Diese Betrachtungsweise jedoch hat zu ihrer Voraussetzung, weil zu ihrem unentbehrlichen Mittel unseren Infinitesimalbegriff, den wir somit als den Begriff eines fundamentalen wissenschaftlichen Verfahrens erkennen, welches zwar zeitweise hintangestellt, niemals aber entsetzt und erledigt werden kann. Denn auf Mathematik muss Alles reducirt werden können, was irgend als Naturwirklichkeit soll behauptet werden können — wenngleich freilich nicht alle Eigenthümlichkeiten der letzteren ohne Rest in Mathematik aufgehen. Reducirbar hingegen muss alle Art des Wirklichen auf die mathematischen Grundgebilde gedacht werden, nicht sowol wegen „der mathematischen Grundform unserer Erkenntniss", wie Fries und Apelt anthropologisch sich auszudrücken pflegen; sondern weil

die Einfügung in die mathematischen Grundgebilde das unweigerliche und unverwerfliche Kriterium ist, durch welches alles Wirkliche seine objective Gültigkeit nachweisen kann und muss. Und unter diesen mathematischen Grundgebilden behauptet der Infinitesimalbegriff die eminente Position der realisirenden Instanz.

99. Das Endliche und das bestimmte Integral. — Wenn es nun angemessen erscheint, Alles, was Gegenstand der Naturwissenschaft werden kann, als ein Endliches zu begreifen, so wird die Erforschung desselben im letzten Grunde darauf beruhen: dass dieses Endliche gedacht werden kann als eine Summe jener infinitesimalen intensiven Realitäten, als ein bestimmtes Integral. Nur die Schwierigkeit und theilweise Unmöglichkeit, die Grenzen dieses Integrals zu bestimmen, setzt der mathematischen Bestimmung des Endlichen Schranken. Wenn wir von diesen absehen, und lediglich auf diejenigen Gebiete der Naturvorgänge Rücksicht nehmen, welche dem Calcul zugänglich sind, so dürfen wir das Endliche, sofern es objective Gültigkeit erlangt, als ein Unendliches oder als eine unendliche Summe von Unendlichem fassen. Wenn also das Differential die Realität als eine constituirende Denk-Bedingung geltend macht, so bezeichnet das Integral das Reale als Gegenstand.

Die ideale Aufgabe der Wissenschaft als gelöst angenommen, würde alles Natur-Wirkliche ausschliesslich in der Infinitesimal-Analysis realisirt und constituirt gedacht werden. Nur aus Mangel an jener Fähigkeit, die erforderlichen Integrations-Constanten durchgängig zu bestimmen, werden wir genügsam bleiben müssen, und auch fernerhin dasjenige wirklich nennen, was mit den sonstigen Correcturen der Wahrnehmung übereinkommt, nämlich der geometrischen Anschaubarkeit und der niederen Zählweise. Aber sofern Geometrie wie Arithmetik das Differential involviren, werden wir uns darüber klar werden müssen, dass wir bei demjenigen Wirklichen, welches dem Infinitesimalcalcul unzugänglich bleibt, das Princip der Realisirung in einer andern Vertretung des Grundsatzes der Realität oder der intensiven Grösse zu suchen haben, oder stillschweigend voraussetzen.

Diese andere Vertretung bedarf jedoch ausdrücklicher Rechtfertigung, und, wie wir sehen werden, erheblicher Einschränkung.

Von dieser werden wir zum Abschluss dieser Untersuchung handeln.

Jetzt gilt es zu erkennen, dass in der infinitesimalen Analysis zugleich eine Synthesis vollzogen und gewährleistet wird, vermöge welcher das Endliche realisirt, und als ein Reales in der vollen Anforderung des empirischen Realismus constituirt wird. Diese Bedeutung wohnt dem Verfahren bei, durch welches wir im Stande sind, das Problem eines sinnlichen oder empirischen Dinges in letzter Instanz zu einem Gegenstande der wissenschaftlichen Erfahrung oder der mathematischen Naturwissenschaft zu machen.

Man hat geglaubt, das Differential sei eine gewagte Abstraction. Es zeigt sich dagegen, dass das sinnlich Endliche ein gewagtes Concretum ist, gestützt höchstens durch eine sinnliche Auffassung der Zahl, welcher das Ding vorerst gegeben ist, auf dass es gezählt werden könne. Derjenige Zahlbegriff hingegen, welcher das Ding selbst vielmehr erst erzeugt, zum mindesten erzeugen hilft, die Differential-Zahl legt das Fundament, das die Integration ausbaut. Die Integralgrösse ist dem Ideal der Objectivirung gemäss die wissenschaftliche Bestimmung des Endlichen.

101. Die intensive Realität und das Ding an sich. — Daher ist diese unsere Auffassung der intensiven Grösse ein unverächtliches Mittel, die leidige Frage von dem Ding an sich zu erledigen. Offenbar complicirt sich das angebliche Ding an sich mit der Realität. Man glaubt, es müsse ein Ding angenommen werden, welches nicht fraglicher mit dem Bewusstsein in Beziehung stehe, als dass es die Sinne afficire. Und so entstand und besteht dem Kantischen Idealismus der bodenlos thörichte Einwand: dass er diese Sorte von objectiven Dingen in Abrede stelle. Philosophirende Menschen, die um das Verständniss von Mathematik und Naturwissenschaft sich bemühen, schreiben noch heute bogenlange Auseinandersetzungen darüber, ob Kant „afficirende Dinge“ angenommen oder geleugnet habe! Weder die transscendentale Aesthetik, noch die transscendentale Logik ist für solche Schriftsteller geistig vorhanden. Vielleicht lernen sie aus dieser Beleuchtung der Realität, dass der recipirte Ausdruck des Afficirens ein ungenauer Ausdruck ist, zu dessen Correctur die Mathematik und die reine Naturwissenschaft von Kant herangezogen wurden, wie die mathematische

Naturwissenschaft selbst zum Behufe dieser Correctur sich ausgebildet hat.

Denn wenn mit der extensiven Grösse das Gebiet der Fictionen nicht gänzlich verlassen wird, wenn in Raum und Zeit, wie in den Grundlagen der Substanz und Causalität der Gegenstand nur ein Correlat, also nur subjectives Gebild zu bleiben scheint, so vertieft sich die mathematische Erzeugung des correcten Gegenstandes, des objectiv gültigen Dinges in unserem intensiven Denk-Mittel, welches ein Integral zu Stande bringt.

Diese Summe ist nicht eine Strecke, ist nicht an sich und principiell eine extensive Quadratur — sowenig als das Differential ein extensives Quantum bedeutet. Die Summe intensiver Werthe ist selbst intensiv; dennoch zwar zur Darstellung des Endlichen geeignet, aber eben doch als „Grenzwerth" desselben, oder zutreffender, wie wir zu erweisen versucht haben, ausgedrückt als Erzeugungs-Werth des Endlichen gedacht. Denn die intensive Realitätsgrösse ist nur die Erzeugungs-Einheit, anstatt der extensiven Maass-Einheit (92).

102. Die Ordnungen des Infinitesimalen und die Qualitäten. — Hier könnte nun die Frage sich erheben: wie es zu verstehen sei, dass alle Arten endlicher Qualitäten aus den intensiven Realitäten sich erzeugen. Die Beantwortung dieser Frage hebt zugleich eine logische Schwierigkeit, die in der Differential-Rechnung noch immer gefunden wird, nämlich die logische Möglichkeit höherer Ordnungen des Differentials. Wir haben bei Leibniz (57, 60), ja schon bei Galilei (48) sehen können dass die höhere Ordnung nicht eine spätere Erweiterung, sondern ein Vehikel für die Entdeckung des Differentialbegriffs war. Das dx ist keineswegs Null, sondern als Zahl zu denken, wie die Ruhe als intensive Bewegung. dx ist diejenige Zahl, welche die Zahl-Grösse zur Zahl-Realität bringt.

Als solche Realitäts-Einheit ist dx zunächst zwar constant; denn sie bezeichnet das jeweilig Letzte, in welchem der Hilfsbegriff der Veränderung befriedigt und somit zum Stehen gebracht ist. Wenn hingegen die Variable noch mit einem dx complicirt erscheint, so ist dies ein Anzeichen, dass die letztmögliche Realitäts-Einheit noch nicht erschöpft ist. Alsdann muss dx, als mit diesem x behaftet, selbst wiederum als variabel gedacht werden, zu Gunsten dieses seines x, mit dem es complicirt ist (59).

In diesem dem Behufe, zu welchem dx erdacht ist, entsprechenden Sinne stellt der Realitätsbegriff eine relative Stufe der Erzeugung dar. Das dx bezeichnet demnach diejenige Stufe, um welche eine Integralgrösse x als auf ihren Realitäts-Einheiten aufsteigt. Die Realitäts-Einheiten wird man nicht extensiv neben einander gelagert erwarten. Im Sinne der intensiven Realität setzt die Geschwindigkeit die Beschleunigung voraus, wie die Berührung die Osculation. Ob nun alle höheren Differentialien eine geometrische und physikalische Deutung zulassen, diese Frage wird nach dem, was wir über das Verhältniss von reiner und angewandter Mathematik (90) anzudeuten gewagt haben, keine Anfechtung bereiten; genug, dass in wichtigen und fruchtbaren Anwendungen solche Deutung gegeben ist.

Und von diesen Analogien aus dürfen wir dem Gedanken Raum geben: das dx mit seinen höheren Ordnungen enthalte den Grund der Möglichkeit einer unbegrenzten Verschiedenheit der Qualitäten und der Dinge. Jedes Differential ist wie die Monade un monde entier plein d'une infinité. Wir erkennen damit den sachlichen Zusammenhang, der unter den Begriffen Realität und Qualität besteht. Der Unterschied der Qualität ist als ein solcher der Realität und auf die verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen zurückführbar zu denken.

Auch dieser Gedanke, den wir hier als eine Consequenz unseres Realitätsbegriffes anzudeuten wagen, darf in den neueren, selbst den atomistischen Ansichten eine gewisse Unterstützung erblicken. Nicht aus der Grösse und Anordnung der Atome allein wird die substantielle Grundlage der Elemente abgeleitet, sondern aus Intensitäts-Verhältnissen. „Als Lavoisier die genaue Bestimmung der Gewichte in die Chemie einführte, nahm er die Masse als Grundlage für diese Wissenschaft: allein nunmehr muss sie als neue Grundlage die Bestimmung der Geschwindigkeiten erhalten, von denen die lebendige Kraft oder das Maass der Energie abhängt, mit anderen Worten, sie muss auf die calorischen Beziehungen gegründet werden.“ [1])

Nach dieser Ansicht liegt in den Unterschieden des In-

[1]) Secchi, Die Einheit der Naturkräfte, Autoris. Uebersetzung von L. Rud. Schulze, Bd. II, S. 325.

tensiven der Unterschied des Realen, und die Materie wird als aus „Gruppen von Systemen“ bestehend gedacht, welche Kraftbeziehungen darstellen. „In den Systemen, welche auf diese Weise gebildet sind, ist weiter die ursprüngliche Wurfgeschwindigkeit zu beachten, denn diese kann die Ursache sein, dass die Atome sehr verschiedene Bahnen durchlaufen und dass sie Excursionen von sehr verschiedener Weite beschreiben; und hierin kann recht wohl, wie Graham bemerkt, der Grund für die Verschiedenheit des Gewichtes der chemischen Aequivalente liegen. Ferner können sich gleiche Volumina mit einander vereinigen und dabei ihre fortschreitende Bewegung gänzlich oder zum Theil beibehalten, ihre Rotationsbewegung aber ändern, wodurch auch die Dichtigkeit des Elementes sich abändert.“ [1])

So sehen wir in die chemische Behandlung der Atomistik denselben Gesichtspunkt des intensiven Princips eingeführt, dem wir auch in der physikalischen Atomistik begegnet waren: die Masse wird zunächst inextensiv gedacht, um sodann positiv als intensive Realität zu Grunde gelegt zu werden; und zwar bietet die Verschiedenheit in den Geschwindigkeiten der Atome eine Analogie für die Ordnungen des Differentials. Und wie die Geschwindigkeits-Unterschiede einen Grund enthalten können für die Gewichts-Unterschiede der Aequivalente, mithin für die Qualität der Elemente und der Verbindungen, so bildet das Differential nicht nur an sich die Unterlage des Atoms, sondern die Ordnungen desselben erscheinen im Lichte von Bedingungen für die eingeschränkter Weise nothwendige Annahme einer Verschiedenheit der Dinge.

Das Ding selbst wird demnach in der intensiven Realität gegründet, wie seine Darstellung im Integral als das fundamentale Mittel und Kriterium der Objectivirung gilt. Somit ist das Differential das fruchtbare und eminente Beispiel der intensiven Realität.

103. Ein Element des Bewusstseins als unmittelbarer Vertreter der Realität. — Indessen ist es nicht das einzige Beispiel. Es giebt vielmehr ein Element in dem Apparate des Bewusstseins, welches noch unmittelbarer und eindringlicher die Forderung intensiver Realität vertritt (98). Indem man von

[1]) Secchi a. a. O. II, S. 282 f.

dem Differential zu dem Gedanken dieses neuen Elementes sich hinwendet, will es sogar scheinen, als ob das letztere der alleinige oder mindestens bevorzugte Repräsentant der Realität sei. Denn worin liegt am letzten Ende alle Realität geborgen und bezeugt? Worin anders als in dem Bewusstsein? Sind doch alle Mittel, das Reale zu bestimmen, nur Mittel und Elemente des Bewusstseins. Die transscendentale Erörterung, welche die Elemente des wissenschaftlichen Bewusstseins bestimmt, beruht ja doch, wenngleich nicht sachlich und rechtlich, so doch nach der Weise der Erwerbung jener abschliessenden transscendentalen Einsicht auf der sogenannten metaphysischen Erörterung, welche ihr diejenigen Elemente des Bewusstseins zerlegt, in denen apriorischer Besitz angesprochen werden darf.

Mithin können wir auch bei der Ergründung des objectiven wissenschaftlichen Bewusstseins die Thatbestände nicht umgehen sollen, die das Seelenereigniss des Bewusstseins ausmachen — wenngleich wir bei denselben als solchen seelischen Vorgängen nicht stehen bleiben dürfen. Im letzten Grunde ist also die intensive Realität des dx ein Element des Bewusstseins, und zwar ein solches, welches im Unterschiede von der extensiven Zahlgrösse nicht schlechthin der Anschauung zugehört, obzwar es derselben keineswegs gänzlich entrückt ist.

Aber eben darin, dass das Unendlichkleine über die Anschauung hinausstrebt, einen tiefern Grund der Realität befestigen will, als welcher in der Anschauung liegt, die doch immer nur in Vergleichung besteht und auf Vergleichung abzweckt; eben das, worin das Differential alle Maassgrösse zu übertreffen berufen ist, der erzeugende Anfang selbst weist auf den Quellpunkt hin, aus welchem alle Realität herfliesst: das Bewusstsein. Nun gehört dem Bewusstsein aber Alles an, was immer als erkenntnisskritisches Element angenommen wird, also auch die Anschauung. Wenn daher die Anschauung überflügelt werden soll, so genügt es nicht, für dieselbe das Bewusstsein zu setzen. Es muss vielmehr ein Element des Bewusstseins eingesetzt werden, welches als solches dem Elemente der Anschauung selbständig sich anfügt, zu demselben Behufe, dem die Anschauung nicht genügt, zur Begründung der allerdings im Bewusstsein beruhenden Realität.

Ein solches Element ist von der erkenntnisskritischen Analyse zu bestimmen; und in demselben werden wir, so muss

es scheinen, einen unmittelbarern Ausdruck der Realität zu erkennen haben; da ja das Differential nur vermittelter Weise und nicht ohne Complication mit der extensiven Anschauung die intensive Realität zu vertreten vermag. Aller mathematische Ausdruck ist eine Vermittelung dieser Forderung. Wenn ein Element des Bewusstseins schlechthin ausfindig gemacht werden kann, so wird es fraglich sein müssen, ob in demselben die transscendentale Geltung behauptet werden dürfe; aber der unmittelbare Ausdruck der Realität kann in demselben erwartet werden.

104. Die Vorstellung nicht Element. — Es liegt nahe, die Vorstellung als dieses fragliche Element des Bewusstseins in Anspruch zu nehmen, wie denn in der nachkantischen Philosophie besonders bei Herbart der Vorstellung diese Bedeutung, das Bewusstsein schlechthin zu repräsentiren, zuerkannt worden ist. Indessen abgesehen von den Schwierigkeiten, welche in psychologischer Rücksicht mit dieser Hypothese verknüpft scheinen, so kann in erkenntnisskritischer Rücksicht die Vorstellung nicht als Element geltend gemacht werden. Denn in letzterer Beziehung kann nur eine eigenthümliche Richtung und eine ursprüngliche und einfache Weise des erkennenden Bewusstseins als Element bezeichnet werden. Die Vorstellung hingegen ist an sich complicirt.

Es ist der Begriff der Vorstellung, die Möglichkeit, das Wunder seelischer Zusammensetzung zu bezeichnen, und in solcher Bezeichnung zu erklären. Die Vorstellung dient also ihrem Begriffe nach nicht dazu, Elemente des Bewusstseins als solche zu unterscheiden, ein Element neben anderen in sich darzustellen; sondern die an sich wichtige und auszuzeichnende Eigenthümlichkeit des Bewusstseins zu vertreten: dass es, als wäre es ein mechanisches Geräth, Zusammensetzungen verstatte. Wie diese Zusammensetzungen als psychische zu verstehen, zu ermitteln und zu beleuchten seien, das ist der psychologische Charakter und Werth der Vorstellung.

Als Typus der Zusammensetzung jedoch kann die Vorstellung nicht erkenntnisskritisch ein Element des Bewusstseins bezeichnen; dieweil in der Vorstellung die Anschauung enthalten sein dürfte. Man kann schroff, aber, soweit ich sehen kann, instructiv diesen Sachverhalt dahin bezeichnen: dass die Vorstellung überhaupt kein erkenntnisskritischer Ter-

minus sei. Denn wie sehr sie psychologisch die vornehmliche Eigenthümlichkeit des Bewusstseins kennzeichnet, so ungeeignet ist sie, eine allgemeine Richtung des Erkennens auszuzeichnen, weil in ihr alle Grundzüge des letztern zusammenlaufen. Die Anschauung wenigstens ist in ihr enthalten.

105. Die Empfindung als Einheit. — Den ältesten Zeiten der griechischen Speculation ist es daher mit unserer modernen Physiologie gemein, in der Empfindung das Bewusstsein entspringeu zu lassen. Die Empfindung scheint der unmittelbare Ausdruck der Realität, weil der nächste Widerhall des reizenden Objects zu sein. Wenn wir Realität hauptsächlich in den Dingen fordern und erwarten, so lässt es sich verstehen, dass die Empfindung die natürlichste Anknüpfung für jene Forderung bietet; denn aus ihr wird sie entlehnt, wenngleich in ihr nicht verbürgt. In der Empfindung antwortet das Bewusstsein auf den Reiz, den das Ding ausübt, in dem das Ding sich bethätigt. Daher scheint die Empfinduug der Quell des Gegenstandes zu sein; daher scheint für die Empfindung selbst Realität vorausgesetzt werden zu müssen, auf dass kraft derselben in der Empfindung der Gegenstand gegründet werde. So dringlich erscheint die Empfindung als die unweigerliche Instanz, als der natürliche Repräsentant des realen Gegenstandes. Und somit scheint mehr noch als das Differential die Empfindung als ein Beispiel der intensiven Realität gelten zu können; daher denn Kant den Grundsatz der Realität für die Anticipationen der Empfindung formulirt hat (78—80).

Und zwar nicht nur für die Realität schlechthin scheint die Empfindung eintreten zu können, sondern sogar für die intensive Realität. Denn unter der intensiven Realität hatten wir diejenige Einheit verstanden, welche alle Theilung, Abzählung und Messung ausschliessend, nur als Einheit gedacht werden kann, als entspringende oder als verschwindendende, sodass sie nur zu der Null im Verhältniss steht, nicht aber zu einer sonstigen discreten Einheit. Für solche Einheit scheint die Empfindung das evidente Beispiel zu sein.

Denn die Empfindung hat den Anschein, das absolut Untheilbare zu sein, nur als Einheit sich denken zu lassen. Alles Andere könne sich, so scheint es, noch immer theilen lassen, selbst das Atom; ja sogar das Differential, sofern es ein zweites giebt, droht den Gesichtspunkt der Theilung nicht gänzlich fern-

zuhalten, zum mindesten will es nicht die Möglichkeit tieferer Ergründung der Realität ausschliessen. Die Empfindung hingegen lässt nicht einmal höhere Ordnungen ihrer selbst zu. Sie ist da, oder ist nicht da. Wenn sie aufsteigt, ist sie da, und sie bleibt da, so lange sie nicht verschwunden ist. Ehe sie aber aufgestiegen und nachdem sie verschwunden, ist sie nicht weniger da, sondern überhaupt nicht da. Man kann die eine Empfindung stärker, lebendiger, deutlicher zu haben meinen, als eine andere, und alle diese und ähnliche Unterschiede pflegt man unter dem vagen Ausdruck der Intensität zusammenzufassen; aber die stärkere Empfindung ist darum nicht mehr Empfindung als die minder starke.

Daher scheint die Empfindung das Gepräge des Intensiven zu tragen, nicht im schwankenden Sinne der Intensität, sondern in der festgesetzten Bedeutung letztmöglicher Realität. Denn als Realität gedacht, ist es sofort klar, dass die stärkere, also intensivere Empfindung nicht auch den höhern Grad des Intensiven bedeute. Hören zu können wie das Gras wächst, bezeichnet der Volksmund als das Muster der Klugheit. So ist auch die leiseste Regung der Empfindung das kräftigste Zeugniss der Realität. So erscheint die absolute Einheit der Empfindung mehr noch als das Differential geeignet, den Grundsatz der intensiven Realität darzustellen und zu vertreten.

Es entsteht daher die Aufgabe, das Verhältniss zu prüfen und zu bestimmen, in welchem diese zum mindesten, so scheint es, gleichwerthigen Bürgen der Realität zu einander stehen. Das Differential kann freilich nicht empfunden werden, so wenig wie die Empfindung von vornherein als ein dx formulirbar und verrechenbar zu sein scheint. Aber was diese beiden Beispiele der Realität im Verhältniss zu einander und zu dem Begriffe und Grundsatze, den sie vollziehen, bedeuten: ob sie einander unterstützen und ergänzen, oder aber behindern und verdunkeln, das bedarf ausführlicherer Erwägung; zumal in neuerer Zeit diese Frage das Problem eines besondern Untersuchungsgebietes geworden ist.

106. Empfindung und Wissenschaft. — Die Anstellung dieser Erörterung erfordert nur die Erinnerung und Anknüpfung an den Gegenstand dieser ganzen Untersuchung überhaupt. Erinnern wir uns nur, dass gerade zur Correctur der Empfindung die intensive Realität eingeführt wird. Ist doch

gerade die Empfindung das Sympton des Subjectiven, welches zu entkräften die hauptsächliche Aufgabe alles Erkennens bildet. Die Diagnose des Fieberkranken geht nicht von der subjectiven Temperatur-Empfindung aus, sondern davon, dass diese in der Temperatur-Messung objectivirt wird. Diese Messung aber setzt ihrerseits die intensive Realität voraus, in der allein der Begriff der Wärmebewegung begründet wird. So sehen wir überall, dass Wissenschaft darin sich bezeugt: der Empfindung zu der ihr fehlenden Objectivirung anderweit zu verhelfen.

Mehr noch als die Anschauung bietet demnach die Empfindung als eigentliches Fragezeichen der Mathematik sich dar. Die Anschauung ist von vornherein der Mathematik verwandt und zugehörig; die Empfindung aber ist an sich subjectiv, die Resonanz des Bewusstseins schlechthin. Die Antwort ertheilt zunächst die Physik, welche den Inhalt der Empfindung zu Qualitäten objectivirt. In diesem Inhalt der Empfindungs-Qualitäten sind Gegenstände constituirt, sofern dieser Inhalt mit den Mitteln und Kriterien der physikalischen Forschung gewonnen und bestimmt ist. Zu diesen aber gehört in letzter Instanz das Differential als das Werkzeug und Zeugniss der Realität. Mithin liegt die Empfindung eigentlich der Realität näher, weil was die Empfindung aufgiebt, nur durch das Unendlichkleine gelöst werden kann, während die Anschauung hauptsächlich auf die extensive Grösse angewiesen bleibt.

Wenn nun aber nach dieser Reduction der Empfindung auf ihren objectiven Inhalt, mithin auf die intensive Grösse, ausserdem noch die Empfindung in Frage kommt, so kann diese Frage sich nur auf die Empfindung als einen Vorgang des Bewusstseins beziehen; und somit unterliegt ihre Untersuchung den allgemeinen Bedingungen des Verhältnisses von Materie und Bewusstsein. Diese Bedingungen lassen sich in das kurze Wort zusammenfassen: dass die Materie nicht sowol die Grundlage für das Bewusstsein, als vielmehr für das Studium des Bewusstseins ist. Die Materie bezeichnet diejenige Gruppe der Erscheinungen des Bewusstseins, an welcher wir die andere Gruppe derselben, die psychische, studiren müssen; sofern wir von Psychologie mehr erstreben, als eine vergleichende Beschreibung der seelischen Vorgänge.

Dieses Studium der Materie für das Bewusstsein, oder des Bewusstseins an der Materie leistet die Physiologie. Diese

prüft und ermittelt, welche Reize überhaupt als Empfindung beantwortet werden, und nach welchen der mathematischen Formulirung zugänglichen oder angenäherten Bestimmungen und Gesetzen. Die Physiologie lehrt auch, in welchem Zeit- und Stärke-Verhältniss der einzelne Vorgang der Empfindung auf die Einwirkung des einzelnen Reizes erfolgt.

Alle diese Fragen der Physiologie haben zu ihrer gemeinsamen Voraussetzug die Annahme des Reizes; und ihre correcte Behandlung ist daher bedingt durch das erkenntnisskritische Verständniss dieser Annahme: durch die Auffassung des Reizes als der objectivirten Empfindung. Nur von dieser Einsicht aus lässt sich ein für die Consequenzen erspriessliches Studium des subjectiven Moments der Empfindung instruiren. Mit dieser Einsicht aber muss sich, so schien es, das materielle Studium des Bewusstseins in seinen Schranken vqllständig verfolgen lassen. Welches besondere Interesse und welches besondere Problem behandelt nun die Psychophysik?

107. Das Problem der Psychophysik. — Interesse und Problem scheinen hier zusammenzufallen; sind jedoch keineswegs identisch. Denn das Interesse der Psychophysik bezieht sich auf die Ergründung des Verhältnisses von Leib und Seele; das Problem dagegen betrifft das Verhältniss der Grösse der Empfindung zur Grösse des Reizes. Das Interesse der Psychophysik bildet demnach eine Grundfrage der allgemeinen Erkenntnisskritik, einen Theil der Frage von Materie und Bewusstsein. Das Problem der Psychophysik dagegen gehört offenbar dem Zusammenhange der hier gepflogenen Erwägungen an.

Ob der Empfindung, sofern ihr eine Grösse zugesprochen wird, eine intensive zuerkannt werden könne, wenn anders eine extensive ihr abgesprochen werden muss; das ist eine Frage, welche den Begriff der intensiven Grösse betrifft, zum mindesten seine Illustration, wenn nicht sogar seine Feststellung. Denn es konnte die Frage entstehen, ob nicht mehr noch als das Differential die Empfindung als ein Beispiel der intensiven Realität gelten müsse. Wir brauchen nur für Grösse Realität zu setzen, um uns dies zu vergegenwärtigen, dass die Empfindung unmittelbarer als Quell und Bürgschaft des Intensiven gedacht werden kann.

Indessen ist zwischen Realität und Grösse zu unterscheiden, um Recht und Unrecht der Psychophysik auseinanderzuhalten.

Der Werth des psychophysischen Problems besteht nämlich unseres Erachtens gerade darin: die Empfindung als intensive Grösse und nur als solche empirisch zu bestätigen. Diese Bestätigung erfolgt durch den Begriff der Ebenmerklichkeit, durch welchen die psychologische Charakteristik des Bewusstseins erheblich gefördert worden ist. Die Einwürfe, die gegen diesen Punkt gerichtet werden, zeigen nur ein totales Missverständniss der guten, nicht nur der empirisch unbestrittenen, sondern auch der tiefern philosophischen Tendenz dieses redlichen Problems.

108. Die Ebenmerklichkeit. — Diese tiefere Tendenz lässt sich schon darin erkennen, dass das Bewusstsein in der Psychophysik nicht mehr gedacht wird als ein Behältniss, in welchem seelische Vorgänge sich ereignen und ausprägen, wie denn schon durch die andere Deutung des Unbewussten diese Meinung ausgeschlossen wird. Vornehmlich aber ist es der Grundbegriff der ganzen Speculation, das Gesetz der Schwelle, welches diese Ansicht vom Bewusstsein entwurzelt. Nach dem Schwellengesetz nämlich kann eine Empfindung schon dann aufhören, wenn der Reiz, der sie hervorgerufen hatte, noch einen endlichen Werth behält. Dieser endliche Werth, der überstiegen sein muss, damit eine Empfindung stattfinde, wird als Reizschwelle bezeichnet. Somit beginnt die Empfindung nicht schlechthin als Reaction eines Reizes, sondern erst bei einer bestimmten endlichen Grösse desselben. Die Schwelle bezeichnet den Punkt, auf dem diese erforderliche Grösse des Reizes eine Empfindung ebenmerklich werden lässt. Die Schwelle ist der Punkt, an und mit dem die Ebenmerklichkeit beginnt.

Und was für den ersten Anfang der Empfindung gilt, das gilt nicht minder für allen Fortgang, für alle Unterschiede der Empfindung. Die Correlation von Materie und Bewusstsein wird dadurch genauer bestimmt. Nicht jeder Reiz erweckt Bewusstsein, nicht jede Verstärkung des Reizes eine entsprechende Verstärkung der Empfindung. Proportionalität, die noch für Herbart selbstverständlich war, findet sonach nicht statt. Dieses dualistische Vorurtheil beseitigt das Gesetz der Schwelle. Reiz und Empfindung stehen nicht in der zahlenmässigen Correspondenz, wie die materiellen Vorgänge unter einander. Jene Correspondenz betrifft das Extensive; die Empfindung aber, als

in der Ebenmerklichkeit fixirt, ist in solcher empirischen Fixirung als intensive Grösse bestätigt.

Es mag ein berechtigtes Interesse sein, den Naturvorgang der Empfindung als eine Grösse zu bestimmen, nicht lediglich auf ihren objectiven Inhalt zu beziehen, wie sich derselbe in den physikalischen und physiologischen Qualitäten und Gegenständen entfaltet und bestimmt. Sofern dieses Interesse jedoch wissenschaftlich behandelt werden kann, ist diese verlangte Grösse der Empfindung nicht als eine extensive, sondern als eine intensive zu fassen; sie ist als Realität, als Symptom derjenigen Forderung zu denken, die der Grundsatz der Realität befriedigt. Und der psychologische Ausdruck für diese erkenntnisskritische Grundlage ist der Begriff der Ebenmerklichkeit, welcher nur in dieser intensiven Beziehung die Grösse der Empfindung fasst und darstellt. Zwei Empfindungen, die gleichmerklich sind, sind daher gleichgross.

In anderer Beziehung, so scheint es, hat die Grösse für die Empfindung keinen Belang. Die sogenannte Intensität der Empfindung muss durchaus von der intensiven Grösse oder Realität der Empfindung unterschieden werden. Die Empfindung als intensive Grösse besagt, dass ihre Objectivität, von ihrem objectiven Inhalt abgesehen, lediglich in ihrer Bestimmtheit, in ihrer Distinctheit besteht. Das allein ist ihre Macht und Energie, ihre Deutlichkeit und Kraft. Was man sonst unter Grösse = Stärke der Empfindung versteht, fordert und findet seine psychologische Beleuchtung und Aufklärung in demjenigen Niveau, welches, wie auch das Gesetz der Schwelle aussagt, für das Entstehen der Empfindung vorhanden sein muss. Die Empfindung selbst aber entspricht nicht der absoluten Grösse der Reize, sondern dem Verhältnisse unter denselben. Die absoluten Werthe der Reize mögen die Intensität verantworten; die Realität der Empfindung beruht, als in der Ebenmerklichkeit bestehend, auf dem Verhältniss dieser Werthe.

109. Das Interesse der Psychophysik. — So könnte die Versuchung entstehen, das psychophysische Problem für die Charakteristik der Empfindung als intensiver Grösse in Anspruch zu nehmen; zumal Fechner selbst an der Unklarheit des Ausdrucks Intensität Anstoss nimmt. Aber dieser Anstoss führt ihn nicht zur principiellen Frage nach der Möglichkeit einer extensiven Intensität an der Empfindung. Daher giebt er

die Gleichsetzung auf, die er selbst an der Grössengleichheit und Gleichmerklichkeit der Empfindung vollzogen hat, und durch die er ein anderes als ein intensives, in der Ebenmerklichkeit bestimmtes Grössen-Maass der Empfindung ausgeschlossen hat.

Das psychophysische Interesse greift über das Problem hinaus in das Wesen des Bewusstseins und der Materie und deren Verhältniss zu einander. Fechner sagt nicht: Der Reiz ist objectivirte Empfindung; also handele es sich um das Verhältniss von zwei Empfindungen, einer objectivirten und einer nicht objectivirten. Auch sagt er andererseits nicht: Wenn bei der Empfindung von ihrem in dem Reize objectiven Inhalte abgesehen wird, wenn sie selbst als Naturvorgang bestimmt werden soll, so erscheine sie als letztes Symptom der Realität, dessen der Reiz selbst bedarf, sodass mittels dieser Empfindungs-Realität die Reiz-Einheit gegründet werden muss. Das Alles sagt Fechner nicht; denn sonst müsste er sagen: Also giebt es nur als intensive, ebenmerkliche Grösse eine Empfindung; und alle sonstige Grössenvergleichung bezieht sich auf einen Unterschied, der nicht mehr die Empfindung als solche, in der ihr eigenthümlichen Grösse trifft.

Das psychophysische Interesse ist auf den metaphysischen Dualismus von Leib und Seele gerichtet; und zwar nicht um denselben aufzuheben, weder nach der einen noch nach der andern Seite. Die materialistische Consequenz wird nicht nur abgelehnt, sondern durch die Bemühungen, in feineren Unterschieden das Psychische von dem grob Materiellen zu trennen, wird auch die Anerkennung des eigenthümlich Seelischen betont und befördert; auch in der somatischen Grundlage noch soll das Seelische mitwirken; daher das Oxymoron der Psychophysik. Der Dualismus soll nicht geschlichtet und beseitigt, sondern an der Hand desselben sollen wissenschaftliche Einsichten über das Grössen-Verhältniss von Empfindung und Reiz ermittelt werden. So verbünden sich Interesse und Problem. Das ist der fundamentale Irrthum. Und diesen Irrthum vermag allein unser Begriff der intensiven Realität aufzuklären. Daher soll unsere Auseinandersetzung dahin verwerthet werden, um diesen principiellen Fehler des psychophysischen Problems aufzudecken, und damit dasselbe auf eine correctere Interpretation der Weber'schen Constante zurückzulenken.

110. Die psychische Elle. — So dankbar wir die Bedeutung des Begriffs der Ebenmerklichkeit anerkennen, so entschieden also müssen wir den Gedanken der Fundamentalformel verwerfen.[1]) Wenn nach dem Grössen-Verhältniss von Empfindung und Reiz gefragt wird, so muss diese Frage dahin formulirt werden: Wie verhält sich die intensive Grösse der Empfindung zur extensiven des Reizes? Und diese Frage muss zu allernächst dahin beantwortet werden: Die extensive Grösse des Reizes hat zu ihrer unentbehrlichen Voraussetzung die intensive der Empfindung, welche dem Reize die intensive Realität verleiht.

Die Grösse des Reizes setzt zuvörderst also voraus diejenige Einheit, in welcher der Reiz objectivirt, zum objectiven Inhalt der Empfindung realisirt wird. Die Grösse des Reizes ist mithin durch die der Empfindung bedingt; und zwar wie alles Extensive durch das Intensive, so ist auch der Reiz, als der objective Inhalt der Empfindung, durch die Realitäts-Einheit derselben, durch die intensive Grösse derselben bedingt. Die Grösse der Empfindung ist die Erzeugungs-Einheit derselben, auf welcher die Reiz-Einheit beruht.

Es giebt also nur Eine Art von Grösse für die Empfindung, nämlich die intensive, in welcher sich die Empfindung als ein Vorgang des Bewusstseins realisirt, und in welcher Realitäts-Einheit hinwiederum der Inhalt der Empfindung, der Reiz sich im letzten Grunde objectivirt. Ein anderes Maass für die Empfindung, als die intensive Einheit in der Ebenmerklichkeit ein solches darbietet, kann es sonach nicht geben. Denn eine Empfindung ist als solche genau ebenso gross wie die andere; die Empfindung von 31 Loth ist genau so gross wie die von 31 Pfund.

Indessen der Umstand, dass eine Empfindung empirisch, durch den physiologischen Versuch als einer andern gleich geschätzt werden kann, diese Thatsache der Schwelle, welche doch nur kraft der Ebenmerklichkeit die Gleichheit der Grösse der Empfindung constatirt, sollte nun ferner auch die

[1]) Vgl. Ferd. Aug. Müller, Das psychophysische Axiom und die psychologische Bedeutung der Weber'schen Versuche. Eine Untersuchung auf Kantischer Grundlage. 1882. Hiernach können Fechners Gegenbemerkungen (Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 324—326) nicht überführen.

Möglichkeit eröffnen, dass eine Empfindung auch als soviel mal so stark als eine andere gemessen werden könne. Eine „psychische Elle" sollte das Weber'sche Gesetz liefern. Jedoch die Gleichheit der Grösse der Empfindung bezeichnet nur die der intensiven Grösse derselben, nicht aber einer extensiven, welcher vielmehr die Empfindung als solche gänzlich unzugänglich ist. Aber auf das Problem der psychischen Elle trieb die Tendenz, das psychophysische Interesse hin. Zwischen Reiz und Empfindung sollte zur tiefern Durchdringung von Materie und Bewusstsein, von Leib und Seele die „psychophysische Activität" einschreiten. Diese Activität, sofern sie zugleich doch physisch ist, wird daher als „Bewegung" gedacht, und wie auf alle Art von Bewegung scheint auch auf sie die extensive Grösse und zu deren Ergänzung die infinitesimale Analysis anwendbar.

111. Die Empfindung als Function des Reizes. — Dies ist ein methodischer Fehler, welcher beinahe ohne tiefere erkenntnisskritische Verständigung als solcher nachweisbar sein dürfte.

Die Analysis beruht auf dem Begriffe der Function. Als eine Function jedoch im mathematischen Sinne kann das Verhältniss von Empfindung und Reiz nicht bezeichnet werden. Der Ausdruck der „psychischen Elle" macht den strengen Begriff der Function zweideutig, und verletzt seinen Werth. Die Aufstellung der Function $y = f(x)$, in welcher y die Empfindung und x den Reiz bedeutet, ist schlechthin ein mathematischer Fehler, weil es sich dabei um ungleichartige Grössen handelt; weil zwar der Reiz als x, und demgemäss als aus dx entstehend gedacht werden kann, die Empfindung hingegen niemals als y, sondern, sofern sie nach mathematischer Zeichensprache fixirbar scheint, immer nur als dy gedacht werden darf, nämlich als die intensive Einheit, welcher in Bezug auf die extensiven Grössen der Reize oder der Dinge das dx entspricht. dx aber ist die Einheit, aus welcher x aufsteigt; aus dy hingegen steigt kein y auf; sondern es kann nimmermehr, durch keinen Intensitätswandel, etwas Anderes werden als dy.

Für diese Genügsamkeit der Empfindung, nur als dy sich bezeichnen zu lassen, giebt es einen einfachen und hinreichenden Grund: Was y nämlich als Empfindung im Unterschiede von dy zu bedeuten haben könnte, das eben ist der Sinn und Inhalt des

x und seiner Ableitungen, welche die objectivirte Empfindung, das will sagen den Reiz bedeuten. Zu welchem Behufe könnte mithin das y dienen, wenn und sofern es vom x als dem Repräsentanten des Reizes, des Gegenstandes, der Materie unterschieden gedacht wird?

Wie ist es denn aber zu verstehen, dass dieser Fehler von einem Manne gemacht werden konnte, dem wir in der Handhabung und dem Verständniss der mathematischen Methoden nicht im entferntesten uns zu vergleichen erdreisten?

Wie alle principiellen Irrungen erklärt auch diese die Tendenz und das systematische Interesse. In der materiellen Bewegung sollte die Spur des Seelischen, des Rechners entdeckt werden, welche der „Nachtansicht" verborgen bleibt. Und in der Empfindung, dem Tagen des Bewusstseins sollte das Materielle, Leibliche festgehalten werden, das nur die Nachtansicht als heterogen zu denken beliebt. Mithin laufen die beiden Enden jener gegensätzlichen Glieder für Fechner zusammen: er betrachtet die Function von Empfindung und Reiz als ableitbar „aus den Elementen, woraus Beide erwachsen sind".[1]) Und er balancirt sich mit der witzigen Wendung: dass doch auch die Function geistig sei!

Indessen die Elemente, aus welchen Beide erwachsen, sind vielmehr nur Ein Element: die intensive Realität, welche für die Objectivirung des Inhalts der Empfindung zu Grunde gelegt, als eine Art der Einheit des Bewusstseins ausgezeichnet wird. Dieser intensiven Realität entspricht das Differential; und die Rechnung mit demselben hat keinen andern Zweck, als in dieser Realisirung jene Objectivirung zu vollziehen, den Grund für dieselbe zu legen. Auf dass, was die Empfindung darbietet, als ein Objectives und Reales behauptet werden könne, dazu bedürfen und gebrauchen wir die Infinitesimal-Analysis. Die Dinge, als der objective Inhalt der Empfindung, werden dadurch zu Integralgrössen (99).

112. Der Sinn der infinitesimalen Analysis. — Welchen Sinn hat es denn nun aber, nachdem an dem Inhalt der Empfindung diese Quelle der Realität ausgegraben ist, hinterher nochmals die Empfindung selbst zu einem „psychischen Integral" machen zu wollen?

---

[1]) Elemente der Psychophysik, I. 58, vgl. 44 f.

Um das sinnlich Subjective objectiv zu machen, ist die Infinitesimal-Rechnung erfunden, welche nur an dem sinnlich Materiellen reale Anwendung leistet. Welchen andern Sinn könnte dieses sonderbare Verfahren erdenklicher Weise haben, als den des systematischen Interesse: wie die Materie, so auch das Bewusstsein zu behandeln; dieweil „Beide aus denselben Elementen erwachsen". Als wäre die Empfindung eine Schwingung, soll sich an ihr eine infinitesimale Summirung vollziehen können.

Die psychophysische Thätigkeit liesse sich, soweit sie physisch ist, als dx denken, und somit könnte das logarithmische Maassgesetz auf die psychophysiche Activität anwendbar werden. „Das psychische Reflexgesetz, wie es von Weber gefunden und von Fechner mit bewunderungswürdiger Ausdauer bestätigt, aber nicht glücklich formulirt wurde, ist einer physischen Interpretation fähig; man kann statt der Aenderung der Empfindung die Aenderung der sie begleitenden molekularen Centralbewegung betrachten." Durch diesen Gedanken besonders hat Stadler die Erkenntnisskritik des psychophysischen Problems angeregt.[1]) Aber nimmermehr lässt sich diese Thätigkeit, soweit sie psychisch sein soll, in Differentialien auflösen. Und kein Grund lässt sich absehen, dieses Verlangen zu stellen; denn was in und aus dem Bewusstsein an Objectivität gewonnen werden kann, das liefert die Infinitesimalrechnung, wo immer sie auf das Materielle gerichtet wird. Wird sie dagegen auf das Psychische gerichtet, so wird eo ipso das Psychische zum Physischen.

In der That liegt nach Fechners Grundgedanken das Psychische so unmittelbar der psychophysischen Thätigkeit unter, dass das Maass Beider nach ihm vertauscht und identificirt werden kann. Denn er will es nicht etwa blos nicht Wort haben, sondern er will der Wahrheit seines Gedankens gemäss das Bewusstsein nicht zur Materie machen; aber er will allerdings die Kluft zwischen Materie und Bewusstsein, als eine solche der Nachtansicht, für die Tagesansicht verengen und vermitteln. Daher löst er das Bewusstsein in Differentialien auf, und lässt die Empfindung aus infinitesimaler Summation hervorgehen.

---

[1]) Ueber die Ableitung des psychophysischen Gesetzes. Philos. Monatshefte, XIV. p. 215 ff.

Die infinitesimale Summation können wir hingegen, sofern es sich bei ihr um Realisirung handelt, nicht lediglich um den technischen Calcul, nur auf die Abstraction des Materiellen beziehen. Und diese Materie ist uns, nach der Tagesansicht unseres erkenntnisskritischen Idealismus, lediglich eine Inhalts-Gruppe des Bewusstseins. Diesen Inhalt beschreibt die Materie, und zu dieser Beschreibung bedarf sie des Differentials.

Wer daher den Vorgang des Bewusstseins selbst hinwiederum als solchen materiellen Inhalt denkt, der und nur der darf dieses sogenannte Bewusstsein als ein Integral denken. Ein Solcher denkt aber unter dem Bewusstsein vielmehr die Molecular-Bewegung des Nervensystems. Diese hingegen gilt uns als ein wissenschaftlich nothwendiger objectiver Inhalt des Bewusstseins. Dieser Inhalt kann daher nicht als psychophysisch bezeichnet werden; er ist der zum Physischen objectivirte Inhalt des Psychischen.

Ein anderes Interesse endlich an der Objectivität des Bewusstseins können wir nicht anerkennen. Das ist der Unterschied von Mythos und Wissenschaft: dass die Wissenschaft da von Materie handelt, wo der Mythos Bewusstsein sah. Die Molecüle fliehen einander nicht im Bewusstsein des Hasses und suchen sich nicht im Bewusstsein der Liebe. Aber ebensowenig summiren sie sich in unendlicher Summation; sondern wir, die Rechner, vollziehen diese Summirung als einen Kunstgriff in dem Apparat unseres materiellen Erkennens.

Und sofern wir an dem Bewusstsein solche Rechnung vollziehen, gilt uns das Bewusstsein als objectiver, genauer als zu objectivirender Inhalt, und demgemäss als Materie. Zu dieser Objectivirung bedarf es der infinitesimalen oder der intensiven Grösse als der Realität. Die Realität aber ist — Bewusstsein; und zwar nicht materieller Inhalt des Bewusstseins, sondern eine gesetzliche Grundgestalt des wissenschaftlichen Bewusstseins, eine Art der Einheit des Bewusstseins, ein Grundsatz der Erkenntniss. So erledigt sich das psychophysische Problem durch die erkenntnisskritische Bestimmung der Realität.

$$\frac{13}{7}$$

Druck von Issleib & Rietzschel in Gera.

3 2044 072 039 738

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Canceled AUG 30 '71 H

WIDENER

AUG 2 0 2004

SEP 1 0 2003

CANCELLED

BOOK DUE

WIDENER

CANCELLED